OPRM 2016
Nível 3
Segunda Fase
24/09/16
Duração: 4 Horas e 30 minutos

Nome: ______________________

Escola: ______________________

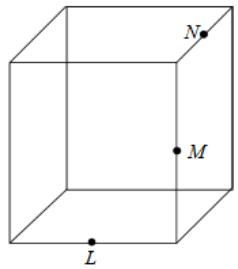
Aplicador(a): ______________________

INSTRUÇÕES

- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **APLICADOR(A)** nos campos acima.
- Esta prova contém 6 páginas (incluindo esta página de capa) e 30 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo peça ao **APLICADOR(A)** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta à qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos. Após esse tempo você terá 10 minutos extras para o preenchimento do gabarito oficial.
- Após o término do preenchimento, entregue ao **APLICADOR(A)** o gabarito oficial com as respostas.
- Esta prova não precisa ser entregue ao **APLICADOR(A)**.

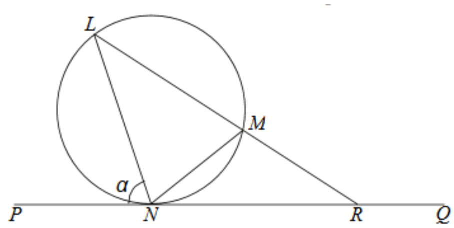
BOA PROVA!

1. Os pontos L, M e N são pontos médios de arestas do cubo, como mostra a figura abaixo. Quanto mede o ângulo $\angle LMN$?



(A) 90 **(B)** 105 **(C)** 120 **(D)** 135 **(E)** 150

2. Na figura, a reta PQ toca em N o círculo que passa por L, M e N. A reta LM corta a reta PQ em R. Se $LM = LN$ e a medida do ângulo $\angle PNL$ é α, $\alpha > 60$, quanto mede o ângulo $\angle LRP$?

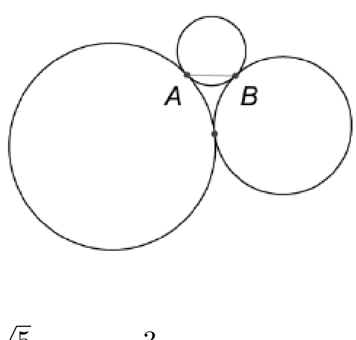


(A) $3\alpha - 180°$ **(B)** $180° - 2\alpha$ **(C)** $180° - \alpha$ **(D)** $90° - \dfrac{\alpha}{2}$ **(E)** α

3. Em um trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a $18cm$ e a diferença dos dois outros lados é igual a $2cm$. Se r é o raio da circunferência inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é:

(A) 12 **(B)** 11 **(C)** 10 **(D)** 9 **(E)** 8

4. A figura mostra três circunferências de raios 1, 2 e 3, tangentes duas a duas nos pontos destacados. Qual é o comprimento do segmento AB?



(A) 1 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(D)** $\dfrac{3}{2}$ **(E)** $\sqrt{3}$

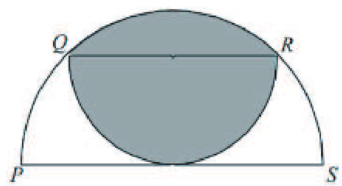
5. Para um inteiro positivo n considere a função

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

Calcule o valor de $f(1) + f(2) + \ldots + f(40)$

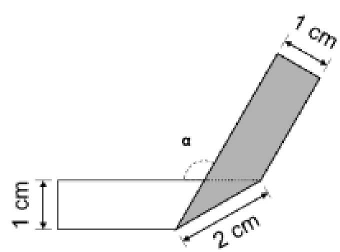
(A) 64 **(B)** 213 **(C)** 214 **(D)** 364 **(E)** 428

6. Na figura temos dois semicírculos de diâmetros PS, de medida 4, e QR, paralelo a PS. Além disso, o semicírculo menor é tangente a PS em O. Qual é o valor da área destacada?



(A) $\pi - 1$ **(B)** $\pi - 2$ **(C)** $2\pi - 2$ **(D)** $2\pi - 3$ **(E)** 2π

7. Uma tira de papel retangular, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura abaixo. Qual é a medida do ângulo α?



(A) 110° **(B)** 115° **(C)** 120° **(D)** 125° **(E)** 130°

8. Tiago escreve todos os números de quatro dígitos tais que os algarismos destes números são não nulos e possuem a mesma paridade. Qual a probabilidade de que, ao escolhermos um desses números que Tiago escreveu, ele seja par?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{1}{6}$

9. Se 3 e $\frac{1}{3}$ são as raízes da equação $ax^2 - 6x + c = 0$, qual o valor de $a + c$?

(A) 1 **(B)** 0 **(C)** $-\frac{9}{5}$ **(D)** $\frac{18}{5}$ **(E)** -5

10. O número $2^{48} - 1$ é divisível por dois números compreendidos entre 60 e 70. Quais são esses números?

(A) 61 e 63 **(B)** 61 e 65 **(C)** 63 e 65 **(D)** 63 e 67 **(E)** 67 e 69

11. Quantos zeros existem no final do número $9^{2016} - 1$?

(A) Nenhum **(B)** Um **(C)** Dois **(D)** Três **(E)** Quatro

12. Sofia foi levar uns docinhos para sua avó; são 7 docinhos de amora, 6 de coco e 3 de chocolate. Durante o caminho, a gulosa Sofia come 2 docinhos. Qual das situações abaixo é possível?

(A) Vovó não recebeu docinhos de chocolate.

(B) Vovó recebeu menos docinhos de coco do que de chocolate.

(C) Vovó recebeu o mesmo número de docinhos de cada uma das 3 variedades.

(D) Existem 2 variedades de docinhos das quais vovó recebeu o mesmo número.

(E) O número de docinhos de amora que vovó recebeu é maior que o dos outros 2 somados.

13. Uma moeda viciada, quando jogada 5 vezes, dá a mesma probabilidade de obter cara exatamente uma vez e de obter cara exatamente duas vezes. A probabilidade de obter cara é diferente de zero. A probabilidade de a moeda dar cara 3 vezes em 5 lançamentos é

(A) $\frac{20}{243}$ **(B)** $\frac{5}{32}$ **(C)** $\frac{40}{243}$ **(D)** $\frac{7}{32}$ **(E)** $\frac{5}{16}$

14. Na terra *Brasilis*, há 100 senadores, cada um com 4 auxiliares. Os senadores e os auxiliares participam de comissões. Uma comissão tem 5 senadores, ou 4 senadores e 4 auxiliares, ou 2 senadores e 12 auxiliares. Cada senador está em 5 comissões e cada auxiliar está em 3 comissões. Quantas são as comissões?

(A) 100 **(B)** 120 **(C)** 140 **(D)** 160 **(E)** 200

15. O número complexo

$$z = \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a \cos a} + i\frac{1 - 2\cos a + 2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a},\ a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

tem argumento $\frac{\pi}{4}$. Assim, o valor de a é:

(A) $\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{5}$ **(E)** $\frac{\pi}{9}$

16. No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é

(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1 **(E)** $\frac{3}{2}$

17. Calcule

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$$

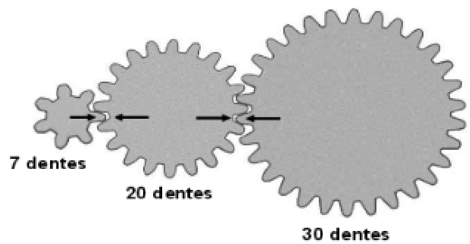
(A) $\frac{210 + 10\sqrt{5}}{4}$ **(B)** $\frac{210 - 10\sqrt{5}}{2}$ **(C)** 76 **(D)** 123 **(E)** 199

18. Uma escada de $25m$ está encostada na parede vertical de um edifício, de forma que o pé de escada está a $7m$ da base do prédio. Se o topo da escada escorrega $4m$, quanto o pé da escada escorregará?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 8

19. Se um triângulo tem lados 3, 7 e 8; podemos afirmar sobre estre triângulo.
    - **(A)** Uma das alturas é inteira
    - **(B)** A área é um número racional
    - **(C)** Todos os ângulos internos do triângulo são agudos
    - **(D)** Os ângulos deste triângulo formam uma P.A.
    - **(E)** Não podemos afirmar nenhuma das alternativas acima.

20. Qual é o número mínimo de voltas completas que a menor das engrenagens deve realizar para obtermos a mesma foto da figura abaixo?



(A) 14 voltas **(B)** 21 voltas **(C)** 57 voltas **(D)** 60 voltas **(E)** 30 voltas

21. A soma
$$\mathbf{S} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$$
é igual a:

(A) $\binom{n+2}{0}$ **(B)** $\binom{2n}{n}$ **(C)** $\frac{n}{2}\binom{6n}{2n}$ **(D)** $\binom{n+2}{n}^2$ **(E)** $\binom{n+1}{n}^2$

22. Ludmilson descobriu hoje que o produto da idade que tinha há 55 anos atrás pela idade que terá daqui a 55 anos é igual ao cubo de um número primo. Podemos dizer da idade atual de Ludmilson:
    - **(A)** Que é um número primo
    - **(B)** Que tem mais de 70 anos
    - **(C)** Que é um múltiplo de 6
    - **(D)** Que é divisível por 13
    - **(E)** Desde que nasceu já se passaram mais de 18 Copas do Mundo

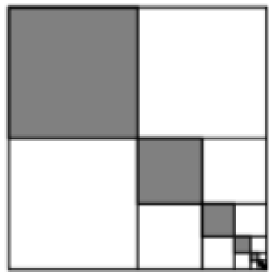
23. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m-15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, então m pode assumir quantos valores?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 4 **(D)** 2 **(E)** 3

24. No meu carro, uma marca particular de pneu dura 40.000 quilômetros se utilizado na frente ou 60.000 quilômetros se utilizado atrás. Intercambiando os pneus traseiros e dianteiros, a maior distância que posso andar a partir de um conjunto de quatro pneus novos é:

(A) 52.000 **(B)** 50.000 **(C)** 48.000 **(D)** 40.000 **(E)** 44.000

25. Um quadrado de área 54 é dividido em quatro quadrados iguais. O quadrado superior esquerdo é de cor cinza; a parte inferior direita do quadrado é de novo dividida em quatro quadrados iguais, e assim por diante. O padrão continua indefinidamente (infinitas vezes). Qual é a área total da área cinzenta do quadrado?



(A) 15 **(B)** 18 **(C)** 21 **(D)** 24 **(E)** 27

26. Quantos triângulos retângulos não congruentes existem de lados com medidas inteiras tais que a área tem valor numérico igual ao do perímetro?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** Nenhum

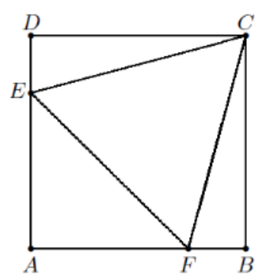
27. O valor de

$$\sum_{n=1}^{100} n.2^n$$

é igual a:

(A) $99.2^{101} - 1$ **(B)** 100.2^{100} **(C)** 99.2^{101} **(D)** $99.2^{101} + 2$ **(E)** $99.2^{101} + 1$

28. Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado e CEF é um triângulo equilátero. Considerando que a área do triângulo equilátero CEF é igual a $\sqrt{3}$ metros quadrados, determine a área do quadrado.



(A) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\sqrt{3}+2$ **(D)** 4 **(E)** 3

29. Usando a figura do problema 28) anterior, ou por qualquer outro meio, podemos dizer que $\operatorname{sen} 15^\circ$ é

(A) $\dfrac{6+\sqrt{2}}{4}$ **(B)** $\dfrac{6-\sqrt{2}}{4}$ **(C)** $\dfrac{1}{4}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ **(E)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

30. Quantos pares $(x;y)$ com x e y inteiros são soluções da equação $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4