



OPRM 2017
Nível 3 (Ensino Médio)
Primeira Fase
09/06/17 ou 10/06/17
Duração: 3 horas

Nome: _____

Escola: _____

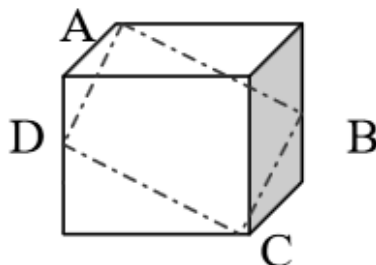
Aplicador(a): _____

INSTRUÇÕES

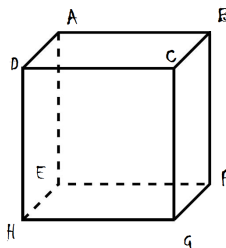
- Escreva seu nome, o nome da sua escola e nome do **APLICADOR(A)** nos campos acima.
- Esta prova contém 5 páginas (incluindo esta página de capa) e 20 problemas. Verifique se existe alguma página ou exercício faltando e, em caso afirmativo peça ao **APLICADOR(A)** para trocar sua prova.
- Esta prova é individual e sem consulta à qualquer material.
- O uso de aparelhos eletrônicos, como celular, tablet, notebook e calculadora, não são permitidos no decorrer da prova.
- A duração da prova é de 3 horas. Após esse tempo você terá 10 minutos extras para o preenchimento do gabarito oficial.
- Após o término do preenchimento, entregue ao **APLICADOR(A)** o gabarito oficial com as respostas.
- Esta prova precisa ser entregue ao **APLICADOR(A)** caso tenha sido aplicada no dia **09/06/17**.

BOA PROVA!

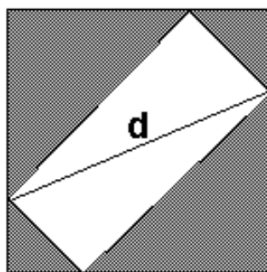
- O número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é:
(A) 36 (B) 48 (C) 52 (D) 54 (E) 56
- Em um cubo de lado k são escolhidos um par de vértices opostos e um par de pontos médios de arestas opostas para formar um quadrilátero $ABCD$ conforme mostra a figura. A área do quadrilátero $ABCD$ é



- (A) $\frac{\sqrt{3}k^2}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}k^2}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}k^2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{5}k^2}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{6}k^2}{3}$
- Escolha três números naturais consecutivos e faça a multiplicação entre estes três números. Qual é a probabilidade do número obtido ser divisível por 12?
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{4}$
 - Uma formiguinha passeia pelas arestas de um cubo cuja aresta é de 15 cm. De quantas maneiras diferentes ela pode ir de A até G , usando o caminho mais curto?

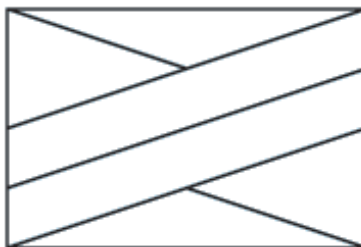


- (A) 6 (B) 12 (C) 8 (D) 9 (E) 15
- De cada lado de um pedaço quadrado de papel são removidos triângulos retângulos isósceles e dessa forma obtemos um retângulo em branco como mostra a figura abaixo. Sabendo que a soma das áreas dos triângulos removidos é 200 cm^2 , qual é a medida da diagonal d do retângulo?



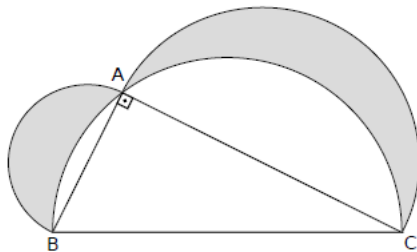
- (A) $12\sqrt{2}$ (B) $14\sqrt{2}$ (C) 18 (D) 20 (E) 24

6. Paulo tem tinta de cinco cores diferentes. De quantas maneiras ele pode pintar as regiões da bandeira da figura abaixo, cada uma com uma única cor, de modo que cada cor apareça ao menos uma vez e que regiões adjacentes sejam pintadas com cores diferentes?

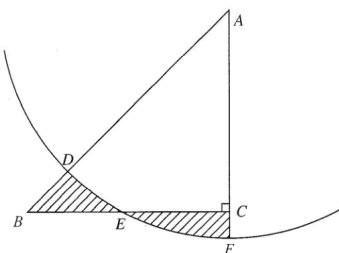


- (A) 336 (B) 240 (C) 480 (D) 720 (E) 960
7. Sejam 6 arames medindo 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50cm e 60 cm. Quantos triângulos não congruentes podem ser formados usando 3 destes arames por vez para formar os lados dos triângulos?
- (A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 10 (E) 12
8. Usamos o símbolo $n!$ para representar o produto dos números naturais de 1 até n , isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual o valor de n ?
- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 18
9. Sendo n um número natural, qual é o menor valor de n tal que $n!$ termina com pelo menos 499 algarismos iguais à zero?
- (A) 2004 (B) 2005 (C) 2009 (D) 2485 (E) Nenhuma das anteriores
10. Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x-1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x+1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x-2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:
- (A) -6 (B) -4 (C) 4 (D) 7 (E) 9
11. A soma de todos os valores inteiros x que satisfazem $(x^2 + 5x + 5)^{(x^2 - 3x - 10)} = 1$ é
- (A) 3 (B) -2 (C) -5 (D) -7 (E) Nenhuma das anteriores
12. Seja $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$. Então podemos dizer que x
- (A) É um número irracional menor do que 1
 (B) É um número natural
 (C) É um número racional menor do que 1
 (D) É um número complexo
 (E) É um número real de módulo maior do que 1
13. Suponha que $a = 212$ e $b = 2201$ são dois números expressos na base 3. A expressão na base 3 do produto $a \cdot b$ é
- (A) 1102212 (B) 2110001 (C) 2002211 (D) 2022012 (E) Nenhuma das anteriores

14. Na figura abaixo temos um triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência $\widehat{BC}$ e duas outras semicircunferências $\widehat{BA}$ e $\widehat{AC}$. A mediana deste triângulo retângulo em relação a sua hipotenusa vale 2,5 cm. Se o lado AB vale 3,0 cm, podemos dizer que a área das duas Lúnulas (áreas sombreadas em forma de lua) medem em cm^2 :



- (A) 2π (B) $8\sqrt{3} - \pi$ (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$ (E) 5
15. Qual é a medida do lado do maior triângulo equilátero que pode ser inscrito em um quadrado de lado 1 cm?
- (A) 1 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (D) $2 - \sqrt{3}$ (E) $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$
16. Abaixo temos um triângulo retângulo ABC com $AC = BC = 1$ e DEF é um arco de círculo com centro em A . Suponha que as áreas sombreadas BDE e CEF tem mesma medida e $AD = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$. Qual é o valor de x ?

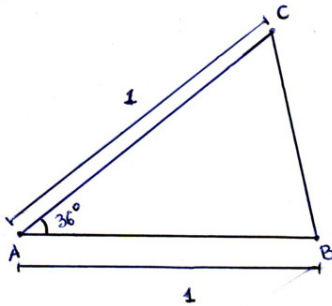


- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
17. Se os números inteiros positivos a, b, c formam uma progressão aritmética, então os números:

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

- (A) Formam uma progressão geométrica
 (B) Formam uma progressão aritmética
 (C) Formam uma progressão arítmo-geométrica
 (D) Não formam nem uma progressão aritmética nem geométrica
 (E) Formam uma sequência de Fibonacci onde o último termo é a soma dos anteriores
18. A sequência crescente 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ... é formada por números naturais que não são nem quadrados perfeitos nem cubos perfeitos. O termo de número 500 desta sequência é
- (A) 604 (B) 578 (C) 528 (D) 507 (E) Nenhuma das anteriores

A figura abaixo valerá para as questões **19** e **20**. Considere o triângulo ABC isósceles, com $AB = 1 = AC$ e $\angle BAC = 36^\circ$.



19. Ao traçar a bissetriz do ângulo $\angle ABC$, esta encontra o lado AC em D . O valor de BD vale:

- (A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

20. Calcule o valor do $\sin 18^\circ$.

- (A) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$