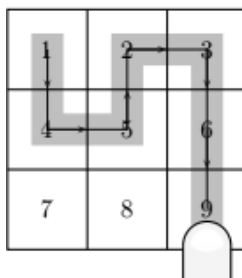


1. Para desbloquear o seu celular, João desliza o dedo horizontalmente ou verticalmente por um quadro numérico, semelhante ao representado na figura, descrevendo um código de 7 algarismos, sem nunca passar duas vezes pelo mesmo algarismo e sem tirar o dedo da tela. Por exemplo, para indicar o código “1452369”, João percorre o caminho indicado na figura:



João esqueceu-se do seu código, mas lembra-se que é divisível por 9. Quantos códigos existem nessas condições?

Solução:

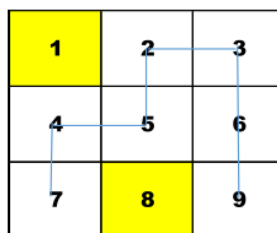
Como são 7 números escolhidos, vamos supor que 9 não esteja entre eles, então a soma dos 7 restantes estaria entre $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ e $35 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$, como nenhuma soma destas é múltipla de 9, temos que 9 tem de fazer parte da senha.

Como a soma de todos os nove algarismos dá 45 (múltiplo de 9), e devo tirar dois deles que somem 9 também, para que reste uma soma múltipla de 9. Os dois algarismos que podem ser tirados podem ser:

- a) 1 e 8 $\Rightarrow$ Algarismos da Senha: 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9.
- b) 2 e 7 $\Rightarrow$ Algarismos da Senha: 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9.
- c) 3 e 6 $\Rightarrow$ Algarismos da Senha: 1, 2, 4, 5, 7, 8 e 9.
- d) 4 e 5 $\Rightarrow$ Algarismos da Senha: 1, 2, 3, 6, 7, 8 e 9.

Senhas possíveis:

- a) Para a senha com algarismos: 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9, temos 1 possibilidade



- b) Para a senha com algarismos: 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, temos 1 possibilidade

1	2	3
4	5	6
7	8	9

c) Para a senha com Algarismos: 1, 2, 4, 5, 7, 8 e 9, temos 3 possibilidades

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

d) Para a senha com Algarismos: 1, 2, 3, 6, 7, 8 e 9, temos 1 possibilidade

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Note que como cada possibilidade de caminho pode gerar 2 códigos (percorrer o dedo num sentido ou no sentido inverso), o total de códigos é $2 \cdot 6 = 12$.

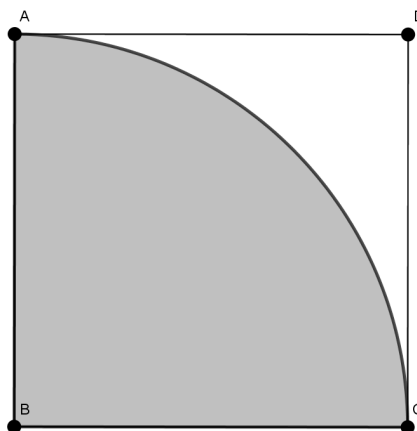
Critérios:

- Concluiu que 9 tem de fazer parte da senha: **+4 pontos**
- Para cada um dos possíveis conjunto de Algarismos para as senhas acima que o aluno chegar: **+2 pontos cada**
- Para cada resposta correta de caminhos acima: **+1 ponto cada**
- Concluiu que o total são 12 códigos: **+2 pontos**

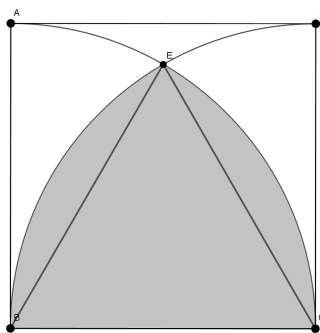
2. João corta um disco de papel cinza de raio 10 cm em quatro quadrantes idênticos. Estes quatro quadrantes João coloca dentro de um quadrado branco de lado 10 cm de modo que nenhuma parte dos quadrantes fique para fora do quadrado. Eventualmente todos os quatro quadrantes ocuparão uma mesma área em comum do quadrado. Quando isto acontecer chamamos esta área comum de “área comunal”. Responda o que se pede:
- Calcule a área comunal supondo que João colocou os cantos dos quadrantes em apenas dois vértices adjacentes do quadrado.
 - Calcule todos os valores possíveis de áreas comunais.

Solução:

- a) A única maneira de João colocar os quadrantes dentro do quadrado é colocando o antigo centro do disco em cima de um dos vértices do quadrado e alinhar os lados do quadrado com os lados do quadrante de modo ao quadrante não ficar para fora do quadrado. A figura abaixo ilustra o encaixe de um quadrante.



A área pedida é a região sobre os arcos BEC da figura abaixo. Ela é formada pela união de 2 setores de circunferência de arco 60° menos a intersecção de um triângulo equilátero de lados iguais ao raio da circunferência e ao lado do quadrado. Veja a figura a seguir



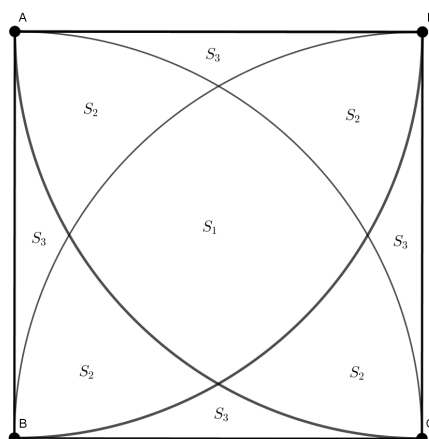
A área será dada por:

$$2 \cdot \frac{\pi 10^2}{6} - \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$$

Crerios:

- Identificou a área para ser calculada: **+1 ponto**
- Escreveu a fórmula correta para o cálculo da área: **+1 ponto**
- Concluiu corretamente o problema: **+2 pontos**

- b) Considere o quadrado e os arcos de circunferência com centro nos vértices do quadrado ligando os vértices opostos do quadrado. Podemos formar a seguinte figura abaixo. Cada região tem área S_1 , S_2 e S_3 . Algumas regiões tem mesma área devido a simetria da construção



Note que obtivemos a área $S_1 + 2S_2 + S_3$ calculada no item acima. Note também que $S_2 + S_3$ pode ser calculado subtraindo a área do quadrante com $S_1 + 2S_2 + S_3$. Temos

$$S_2 + S_3 = \frac{\pi 10^2}{4} - \frac{25(4\pi - 3\sqrt{3})}{3} = \frac{25(3\sqrt{3} - \pi)}{3}.$$

Agora S_3 pode ser calculada subtraindo a área do quadrado com a área calculada no item anterior e $2(S_2 + S_3)$. Temos

$$S_3 = 10^2 - \frac{25(4\pi - 3\sqrt{3})}{3} - 2 \left(\frac{25(3\sqrt{3} - \pi)}{3} \right) = \frac{25(12 - 2\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

Substituindo na fórmula de $S_2 + S_3$ acima temos

$$S_2 = \frac{25(3\sqrt{3} - \pi)}{3} - \frac{25(12 - 2\pi - 3\sqrt{3})}{3} = \frac{25(6\sqrt{3} + \pi - 12)}{3}.$$

Para calcular S_1 basta subtrair a área calculada no item anterior com $2S_2 + S_3$. Temos

$$S_1 = \frac{25(3\sqrt{3} - \pi)}{3} - 2(25(2\sqrt{3} - \pi)) + \frac{25(2\pi - 3\sqrt{3})}{3} = \frac{25(4\pi - 12\sqrt{3} + 12)}{3}.$$

Agora, além da área comunal acima, outros possíveis valores de áreas comunais são:

- i)* Todos os quadrantes sobrepostos em um único vértice: esta área pode ser calculada pela área do quadrante ou por $S_1 + 3S_2 + 2S_3$, que é $\frac{10^2\pi}{4} = 25\pi$.
- ii)* Quadrantes sobre vértices opostos: esta área pode ser calculada por $2S_2 + S_1$:

$$2S_2 + S_1 = \frac{25(6\pi - 12)}{3}.$$

- iii)* Quadrantes sobre os quatro vértices: esta área é igual à S_1 que é $\frac{25(4\pi - 12\sqrt{3} + 12)}{3}$.
- iv)* Quadrantes disponibilizados somente sobre 3 vértices dos quadrados: esta área é igual à $S_1 + S_2$:

$$S_1 + S_2 = \frac{25(5\pi - 6\sqrt{3})}{3}.$$

Critérios (para cada caso i), ii), iii), iv), acima)

- Identificou a área para ser calculada: **+1 ponto**
- Escreveu a fórmula correta para o cálculo da área: **+1 ponto**
- Concluiu corretamente o cálculo da área: **+2 pontos**

3. Denis pegou numa caixa de palitos, todos com o mesmo comprimento, e construiu os hexágonos de lado 1 e de lado 2 da figura abaixo.



- a) De quantos palitos Denis precisaria para construir o hexágono de lado 3?
 b) De quantos palitos Denis precisaria para construir o hexágono de lado 9?
 c) De quantos palitos Denis precisaria para construir um hexágono de lado n ? (dê a resposta em função de n)

Solução:

- a) Note que podemos construir o hexágono de lado n sempre a partir do anterior de lado $n-1$ adicionando $3n$ palitos em cada lado (n palitos horizontais, n palitos na diagonal “\” e n palitos na diagonal “/”) e subtraindo 6 por contar duas vezes o mesmo palito em lados adjacentes. Logo contando na figura de lado 1 temos 12 palitos. A figura de lado 2 vai ter 12 palitos mais 6 vezes (temos seis lados) $3 \cdot 2$ menos 6 (contagem dupla em cada lado), que dá 42. A figura de lado 3 vai ter 42 palitos mais 6 vezes $3 \cdot 3$ menos 6, que dá 90.

Critério:

- Chegou na resposta correta: + 4 pontos.

- b) Denotando por $q(n)$ a quantidade de palitos no hexágono de lado n note pelo item acima que temos $q(n) - q(n-1) = 6 \cdot 3 \cdot n - 6 = 6(3n-1)$. Fazendo a soma telescópica temos

$$q(n) = \sum_{i=1}^n q(i) - q(i-1) = \sum_{i=1}^n 6(3i-1) = 18 \sum_{i=1}^n i - 6 \sum_{i=1}^n 1 = 9n^2 + 3n.$$

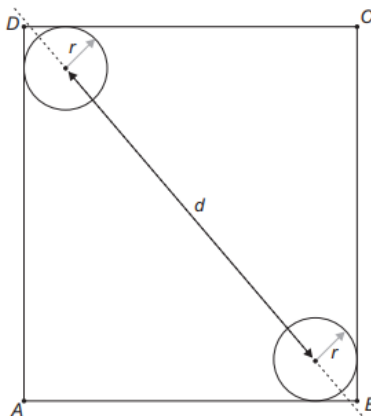
Logo para $n = 9$ temos $q(9) = 756$ palitos.

- c) Conforme desenvolvemos no item acima, temos $q(n) = 9n^2 + 3n$.

Critérios para os itens b) e c):

- Chegou na resposta correta do item b): + 6 pontos
- Achou alguma relação que levasse a quantidade certa de palitos: + 5 pontos
- Concluiu achando a fórmula em função de n : + 5 pontos

4. O retângulo $ABCD$ da figura tem dimensões $AB = 8$ e $BC = 9$. Considere dois círculos, de mesmo raio r , internos ao retângulo e tangentes aos lados dos ângulos com vértices em B e D , respectivamente.



- Calcule a distância d entre os centros dos círculos para $r = 2$.
- Expresse a distância d entre os centros dos círculos em função do raio r .
- Qual deve ser o valor de r para que os círculos sejam tangentes?

Solução:

- a) O retângulo dado tem dimensões 8 e 9. A distância entre os centros dos dois círculos é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 4 ($8 - 2r = 8 - 2 \cdot 2 = 4$) e 5 ($9 - 2 \cdot r = 9 - 2 \cdot 2 = 5$) respectivamente. Segue do Teorema de Pitágoras que:

$$d^2 = 4^2 + 5^2 \Rightarrow d = \sqrt{41}.$$

Critérios:

- Chegou na resposta correta: **+5 pontos**

- b) No caso geral, a distância entre os centros dos círculos é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem e respectivamente $8 - 2 \cdot r$ e $9 - 2 \cdot r$. Portanto,

$$d^2 = (8 - 2r)^2 + (9 - 2r)^2 = 145 - 68r + 8r^2 \Rightarrow d = \sqrt{145 - 68r + 8r^2}$$

Critérios:

- Chegou na resposta correta: **+5 pontos**

- c) Os círculos tangenciam-se quando $d = 2r$, nesse caso satisfaz a seguinte equação

$$2r = \sqrt{145 - 68r + 8r^2} \Rightarrow 4r^2 - 68r + 145 = 0.$$

Caímos em uma equação do 2º grau com $\Delta = 68^2 - 4 \cdot 4 \cdot 145 = 2304 = 48^2$. Logo as possíveis soluções são

$$r_1 = \frac{68 + \sqrt{48^2}}{2 \cdot 4} = 14,5 \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{68 - \sqrt{48^2}}{2 \cdot 4} = 2,5.$$

Como os círculos são internos ao triângulo, a solução do problema é $r = 2,5$.

Critérios:

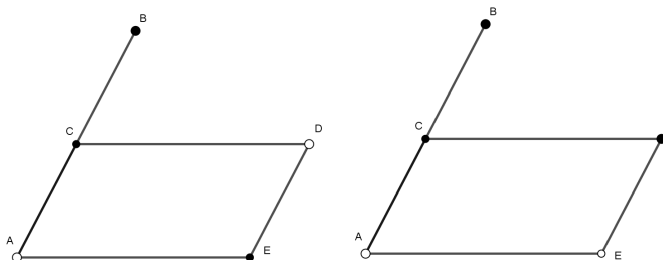
- Chegou na equação de 2º grau: **+5 pontos**
- Calculou corretamente as raízes: **+ 2 pontos** para cada raiz
- Concluiu que somente $r = 2,5$ é solução: **+ 1 ponto**

5. Todos os pontos do plano são pintados de preto ou branco. Quando três pontos que são vértices de um paralelogramo estão pintados de uma mesma cor então o quarto ponto do vértice é automaticamente pintado da mesma cor dos outros três. Explique por que todos os pontos do plano são pintados da mesma cor.

Solução:

Suponha que temos o contrário. Isto é, existe pelo menos um ponto A pintado de branco e um ponto B pintado de preto. Seja C o ponto médio do segmento AB . Temos duas possibilidades para o ponto C : ele pode ser preto ou branco. Sem perda de generalidade suponha que C seja preto (caso C seja branco faça a construção que procede trocando o ponto A pelo ponto B).

Considere um ponto D que não esteja na reta que passa por A e B . Agora considere a reta r que passa por A paralela à reta que passa por C e D , e considere a reta s que passa por D paralela à reta que passa por A e C . Seja o ponto E a intersecção de r com s . Temos por construção que o quadrilátero $ACDE$ é um paralelogramo. Temos as seguintes possibilidades de cores: os pontos D e E tem mesma cor ou tem cores opostas. Mas eles não podem ter mesma cor pois, caso contrário, o paralelogramo $ACDE$ teria que ter todos os pontos de mesma cor, o que não acontece pois C e A tem cores diferentes. Então D e E tem que ser de cores opostas (veja figura abaixo).

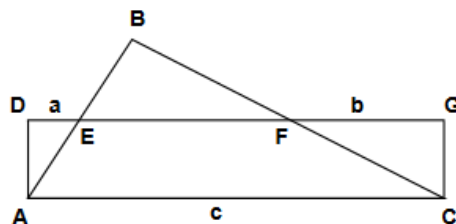


Agora note que o quadrilátero $CBDE$ é um paralelogramo pois $DE = AC = CB$ e as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são paralelas. Porém temos uma contradição pois em ambos os casos acima temos que o paralelogramo tem 3 pontos da mesma cor e um diferente. Portanto, necessariamente, todos os pontos são branco ou todos os pontos são preto.

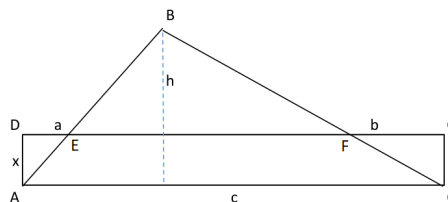
CrITÉrios:

- Começou o argumento supondo o contrário do que queria provar: **+4 pontos**
- Construiu algum paralelogramo com dois pontos branco e dois pontos preto: **+8 pontos**
- Concluiu o problema: **+8 pontos**

6. Na figura abaixo $AC = c$ e os pontos E e F estão na linha DG com $DE = a$ e $FG = b$. Mostre que se a área do triângulo ABC é igual à área do retângulo $ADGC$ então $a + b = \frac{c}{2}$

**Solução:**

Seja h a altura do triângulo ABC e x a altura do retângulo $ACGD$.



Como as áreas do triângulo ABC e do retângulo $ACGD$ são iguais temos $\frac{ch}{2} = cx$, logo $h = 2x$.

Note que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo BEF . Logo a proporção entre suas respectivas alturas e bases é a mesma, e temos:

$$\frac{h}{h - x} = \frac{c}{c - (a + b)}.$$

Trocando h por $2x$ na fórmula acima temos

$$\frac{2x}{2x - x} = \frac{c}{c - (a + b)} \Rightarrow 2 = \frac{c}{c - (a + b)} \Rightarrow a + b = \frac{c}{2}.$$

Critérios:

- Achou a relação entre as alturas do triângulo e do retângulo: **+ 8 pontos**
- Achou que os triângulos ABC e BEF são semelhantes: **+ 4 pontos**
- Concluiu corretamente o problema: **+ 8 pontos**