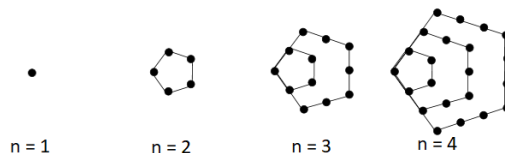


1. “Números pentagonais”, $P(n)$, são números que são dados pelas quantidades de bolinhas na seguinte sequência de pentágonos



Os quatro primeiros números pentagonais são $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P(3) = 12$ e $P(4) = 22$. Faça o que se pede:

- Encontre $P(2018) - P(2017)$
- Calcule $P(100)$.
- “Números triangulares” são números da forma $T(m) = \frac{1}{2}m(m+1)$ onde m é um inteiro positivo. Mostre que todo número pentagonal é um terço de um número triangular.

Solução:

- Pela construção $P(2018) - P(2017)$ é o número de bolinhas que tem em três lados consecutivos de um pentágono que possui 2018 bolinhas em seus lados. Para contar o número de bolinhas em três lados consecutivos podemos somar 3 vezes o número 2018 e depois subtrair 2, pois as bolinhas dos vértices de dois lados consecutivos foram somadas duas vezes. Logo $P(2018) - P(2017) = 3 \times 2018 - 2 = 6.052$.

Critérios:

- Chegou na resposta correta: **+4 pontos**

- Usando o mesmo raciocínio do item anterior, chegamos que $P(i) - P(i-1) = 3i - 2$ para todo $i = 1, 2, \dots$ e se $i = 0$ definimos $P(0) = 0$. Para descobrir $P(n)$ basta fazer a soma telescópica

$$P(n) = \sum_{i=1}^n P(i) - P(i-1) = \sum_{i=1}^n (3i - 2) = 3 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 2 = 3 \frac{(n+1)n}{2} - 2n = \frac{1}{2}(3n^2 - n).$$

Calculando para $n = 100$ temos $P(100) = 14.950$.

Critérios:

- Identificou o padrão para montar a fórmula: **+4 pontos**
- Montou corretamente a fórmula: **+4 pontos**
- Concluiu o problema: **+2 pontos**

- Temos que mostrar que para todo $n = 1, 2, \dots$ existe $m = 1, 2, \dots$ tal que $P(n) = \frac{1}{3}T(m)$ ou $3P(n) = T(m)$. Analisando as fórmulas de $P(n)$ e $T(m)$, escolha $m = 3n - 1$, e assim

$$T(m) = \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}(3n-1)3n = 3 \frac{1}{2}(3n^2 - n) = 3P(n)$$

Critérios:

- Demonstrou corretamente: **+6 pontos**

2. Pintam-se os números naturais de verde ou azul de modo que:

1. A soma de um verde e um azul é azul;
2. O produto de um verde e um azul é verde.

Quantas formas existem de pintar os números naturais com estas regras, de modo que o número 462 seja azul e o número 2016 seja verde?

Solução:

Pelas regras, temos que se o número 1 é verde então todo número também tem que ser verde. Caso contrário, se existir um número n azul então $1.n = n$ é o produto de um número verde e um azul, logo n tem que ser verde, um absurdo. Como queremos que 462 seja azul, o número 1 não pode ser verde, logo o número 1 é azul.

Sejam v_1 e v_2 dois números verdes. Sendo 1 azul então $v_1 + 1$ é soma de um número verde com um número azul, logo $v_1 + 1$ é azul. Agora $v_2(v_1 + 1)$ é a multiplicação de um número verde com um número azul, logo $v_2(v_1 + 1)$ é verde. Mas $v_2(v_1 + 1) = v_2v_1 + v_2$, e se v_2v_1 fosse azul então $v_2(v_1 + 1)$ seria azul pois é uma soma de um azul com verde, o que é um absurdo. Logo v_1v_2 é verde. Como temos que pintar todos os números naturais ou de verde ou de azul então temos que a multiplicação de um número verde com qualquer outro número (azul ou verde) dá um número verde. Isso implica que se n é um número verde então todos os seus múltiplos também são verdes.

Se 2 for verde então $3 = 2 + 1$ é a soma de um verde e um azul, logo 3 é azul. Como $5 = 2 + 3$ é a soma de um verde e um azul então 5 é azul. Prosseguindo indutivamente, todo número ímpar vai ser azul pois pode ser escrito como uma soma do número 2 (que é verde) com o número ímpar anterior (que é azul). Com isso teremos que todo número n da forma $n = 2k$, com k ímpar, vai ser verde, pois é produto de um verde com um azul. Números n da forma $n = 2k$, com k ímpar, são aqueles que deixam resto 2 quando dividido por 4 pois, sendo k um número ímpar, temos $k = 2m + 1$, logo $n = 2k = 2(2m + 1) = 4m + 2$. Logo todo número que deixa resto 2 quando dividido por 4 é verde. Mas o número 462 quando dividido por 4 deixa resto 2. Como queremos que 462 seja azul, este caso não dá certo, isto é, 2 não pode ser verde, portando 2 tem que ser azul.

Sendo 1 e 2 azuis, considere o menor número n tal que n seja verde. Então teremos que

$$1, 2, \dots, n - 2, n - 1$$

são todos azuis. Pelo segundo parágrafo acima, temos também que os números da forma kn são todos verdes para $k \in \{1, 2, \dots\}$. Logo, sendo q um número natural não divisível por n , pelo algoritmo da divisão temos que existem $k \in \{1, 2, \dots\}$ e $r \in \{1, 2, \dots, n - 2, n - 1\}$ tais que $q = kn + r$. Logo, como q é soma de um verde com um azul então q é azul. Concluimos então que todos os múltiplos de n são verdes, e os demais números são azuis.

Decompondo 462 e 2.016 em fatoração de primos, temos $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$ e $2.016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$. Como queremos 2.016 verde temos que as possibilidades para pintar o menor número verde n são dados pelos divisores de 2.016 com exceção do 1 e do 2, que já são

azuis. Temos que descartar também os seguintes divisores de 2.106: 3, 7, 3×7 , 2×3 , 2×7 e $2 \times 3 \times 7$ pois, sendo eles verdes, como 462 é múltiplo destes teremos que 462 seria também verde. Portanto a quantidade de possibilidades de pintar os números naturais de modo que 462 seja azul e 2.016 seja verde é a quantidade de divisores de 2.016 menos oito: $6 \times 3 \times 2 - 8 = 28$ possibilidades.

Critérios:

- Concluiu que o número 1 tem que ser azul: **+3 pontos**
- Concluiu que produto de números verdes tem que ser verdes: **+4 pontos**
- Concluiu que o número 2 tem que ser azul: **+3 pontos**
- Concluiu que os números que não são múltiplos do menor número verde são azuis: **+ 2 pontos**
- Calculou corretamente todas as possibilidades: **+ 8 pontos**

3. Ana, Beto e Carolina vão participar do programa de televisão “Descubra a cor do seu chapéu”. No programa, eles se posicionam em roda e sobre a cabeça de cada um será colocado um chapéu azul ou verde. Cada um pode ver os chapéus dos outros, mas não a cor do seu próprio chapéu. Em seguida, cada um deles escreve em um papel uma dentre três opções “azul”, “verde” ou “passo”. Se todos os que escreveram cores “azul” ou “verde” acertarem a cor do seu chapéu, eles ganham um carro 0 km. Se algum deles chutar a cor do chapéu, “azul” ou “verde”, e errar, os três perdem. Se todos eles escreverem “passo”, então os três também perdem. Vale ressaltar que eles não podem combinar sinais e não podem ver os papéis dos outros participantes. Os três se reúnem para tentar combinar uma estratégia. Carolina começa falando: “Nenhum de nós deve escrever “passo”, devemos chutar entre “azul” e “verde”, pois se todos passarmos perderemos”. Beto reage dizendo: “Discordo, melhor apenas Ana chutar a cor do seu chapéu, enquanto eu e Carolina escrevemos “passo”. Neste caso, a chance de ganhar será maior”. Ana se pronuncia: “Tive uma ideia, se usarmos a minha estratégia teremos a probabilidade de $\frac{3}{4}$ de ganhar o carro.” Responda o que se pede
- Seguindo a ideia de Carolina, qual a probabilidade de ganhar o carro?
 - Mudando para a ideia de Beto, qual passa a ser a probabilidade de ganhar o carro?
 - Dê um exemplo da possível estratégia de Ana que faz a probabilidade de ganhar o carro ser $\frac{3}{4}$.

Solução:

- a) Usando a ideia de Carolina nenhum dos três escreve “passo”. Cada um pode escrever apenas “verde” ou “azul”, isto dá 2 possibilidades para cada. No total temos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades de escritas dos três amigos e apenas uma está certa. Logo a probabilidade de ganhar é $\frac{1}{8}$.

Critérios:

- Calculou corretamente: **+4 pontos**

- b) A ideia de Beto é que Beto e Carolina necessariamente escrevem “passo” e Ana chuta entre “verde” e “azul”. As possibilidades de chute para Ana é 2 sendo que uma delas é o chapéu correto que usa. Logo a probabilidade dos três ganharem o carro é $\frac{1}{2}$.

Critérios:

- Calculou corretamente: **+2 pontos**

- c) Uma possibilidade de estratégia seria o seguinte: olhar para os amigos e escrever “passo” se o chapéu dos amigos forem de cores diferentes e, caso sejam de cores iguais escrever a cor oposta do chapéu dos amigos. Temos as seguintes possibilidades de cores de chapéus que estão na cabeça dos amigos:

	Ana	Beto	Carolina
Caso 1	Verde	Verde	Verde
Caso 2	Verde	Verde	Azul
Caso 3	Verde	Azul	Verde
Caso 4	Verde	Azul	Azul
Caso 5	Azul	Verde	Verde
Caso 6	Azul	Verde	Azul
Caso 7	Azul	Azul	Verde
Caso 8	Azul	Azul	Azul

Nos casos 1 e 8 os amigos perdem porque todos escrevem “passo” de acordo com a estratégia. Nos casos de 2 até 6 dois dos amigos estão com chapéus iguais e o outro diferente. Nestes casos os que estão com chapéus iguais irão escrever “passo” pois veem chapéus diferente, e o amigo com chapéu diferente irá escrever a cor contrária da cor dos chapéus dos outros amigos que são iguais, acertando assim a cor de seu chapéu e ganhando o carro. Logo nas 8 possibilidades acima em apenas 6 eles ganham portanto é probabilidade de ganhar usando esta estratégia é $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Critérios:

- Pensou na estratégia correta: **+8 pontos**
- Concluiu o exercício corretamente: **+ 6 pontos**

4. Seja $f(n)$ uma função satisfazendo as três condições abaixo para todo número inteiro n :

1. $f(n)$ é um número inteiro;
2. $f(n+1) > f(n)$;
3. $f(f(n)) = 3n$.

Calcule $f(2017)$.

Solução:

Note que $f(1) > 1$. Caso contrário teríamos $f(1) = 1$, ou $f(1) = 0$ ou $f(1) = -k$ para algum $k \in \{1, 2, \dots\}$. Se $f(1) = 1$ então por um lado $f(f(1)) = f(1) = 1$ e por outro $f(f(1)) = 3 \cdot 1 = 3$, o que implica $1 = 3$, uma contradição. Se $f(1) = 0$ então por um lado $f(f(1)) = f(0) < f(1)$ e por outro $f(f(1)) = 3$, o que implica $3 < 0$, uma contradição. Se $f(1) = -k$ para algum $k \in \{1, 2, \dots\}$ então por um lado $f(f(1)) = f(-k) < f(1)$ e por outro $f(f(1)) = 3$, o que implica $3 < -k$, uma contradição.

Pelo parágrafo acima temos que $f(n) > 1$ para todo inteiro positivo n pois f é uma função crescente nos números inteiros.

Iremos provar por indução que para todo $m = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$a) \ f(3^m) = 2 \cdot 3^m, \text{ e}$$

$$b) \ f(2 \cdot 3^m) = 3^{m+1}.$$

Para $m = 0$ vamos provar que $f(1) = 2$ e $f(2) = 3$. Como $f(1) > 1$ e f é crescente nos inteiros temos que $f(f(1)) > f(1)$. Portanto $1 < f(1) < f(f(1)) = 3$. Como $f(1)$ é um número inteiro, $f(1) = 2$. Assim $f(2) = f(f(1)) = 3 \cdot 1 = 3$. Suponha agora o resultado verdadeiro para algum $m \geq 1$ e provaremos que vale para $m+1$. Temos que $f(3^m) = 2 \cdot 3^m$ e $f(2 \cdot 3^m) = 3^{m+1}$. Agora $f(3^{m+1}) = f(f(2 \cdot 3^m)) = 3 \cdot (2 \cdot 3^m) = 2 \cdot 3^{m+1}$. Temos também que $f(2 \cdot 3^{m+1}) = f(f(3^{m+1})) = 3 \cdot 3^{m+1} = 3^{m+2}$. Logo os itens acima valem para todo $m = 0, 1, 2, \dots$

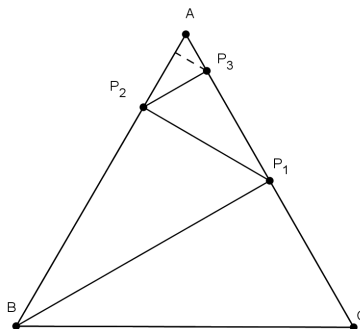
Para todo m temos que existem $3^m - 1$ inteiros i tais que $3^m < i < 2 \cdot 3^m$ e existem $3^m - 1$ inteiros j tais que $f(3^m) = 2 \cdot 3^m < j < 3^{m+1} = f(2 \cdot 3^m)$. Como f é crescente temos que ter $f(3^m + k) = 2 \cdot 3^m + k$ para todo k satisfazendo $0 \leq k \leq 3^m$. Também teremos que $f(2 \cdot 3^m + k) = f(f(3^m + k)) = 3(3^m + k)$ para todo k satisfazendo $0 \leq k \leq 3^m$.

Como $2.017 = 2 \cdot 3^6 + 559$ teremos $f(2.017) = f(2 \cdot 3^6 + 559) = 3(3^6 + 559) = 3.864$.

Crítérios:

- Mostrou que $f(n) > 1$: **+6 pontos**
- Identificou as relações a) e b): **+4 pontos**
- Mostrou que as relações a) e b) são verdadeiras: **+ 4 pontos**
- Conclui o problema e calculou corretamente: **+6 pontos**

5. Sabe-se que o triângulo ABC (ver figura abaixo) é equilátero, que $AB = 1$, BP_1 é perpendicular a AC , P_1P_2 é perpendicular a AB , P_2P_3 perpendicular a AC , P_3P_4 perpendicular a AB , etc. Determine o limite da soma: $BP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots + P_nP_{n+1}$, quando n tende ao infinito.



Solução:

Denote $P_0 = B$. Por construção os triângulos $\triangle P_{n+2}P_{n+1}P_n$ são retângulos com ângulos internos $\angle P_{n+2} = 90^\circ$, $\angle P_{n+1} = 60^\circ$ e $\angle P_n = 30^\circ$ para todo $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Assim

$$\sin 30^\circ = \frac{P_{n+2}P_{n+1}}{P_{n+1}P_n},$$

para todo $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Usando indução podemos escrever

$$P_{n+2}P_{n+1} = (\sin 30^\circ)P_{n+1}P_n = (\sin 30^\circ)^2 P_nP_{n-1} = \dots = (\sin 30^\circ)^{n+1} P_1P_0.$$

Logo $BP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots + P_nP_{n+1}$ é soma de uma P.G. com termo inicial P_1P_0 e razão $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Portanto

$$BP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots + P_nP_{n+1} = \frac{P_1P_0}{1 - \frac{1}{2}}.$$

A medida de P_1P_0 pode ser obtida por Pitágoras no triângulo P_0P_1C . Temos $(P_0C)^2 = (P_0P_1)^2 + (P_1C)^2$. Por hipótese P_0BC é equilátero de lado 1 e BP_1 é altura (e mediana) de P_0BC , logo $P_1C = \frac{1}{2}$. Temos $P_0P_1 = \sqrt{(P_0C)^2 - (P_1C)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Concluindo temos

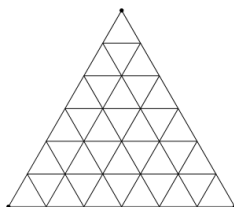
$$BP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots + P_nP_{n+1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

CrITÉrios:

- Achou as relações entre os senos e os lados: **+8 pontos**

- Calculou corretamente P_0P_1 : **+4 pontos**
- Concluiu o problema: **+8 pontos**

6. A planta estrutural de um museu de matemática tem formato de um triângulo equilátero. Dentro deste museu existem 36 salas de exibição que também são em formato de triângulos equiláteros (veja figura abaixo). Cada sala tem uma passagem para a sala adjacente.

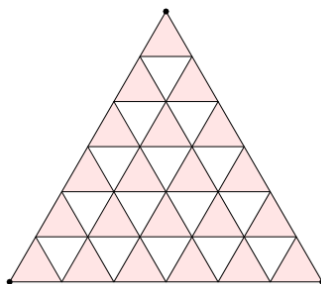


Faça o que se pede:

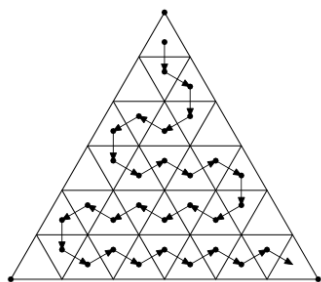
- Explique porque um visitante do museu só conseguirá visitar 31 salas no máximo se planejar passar apenas uma vez em cada sala.
- Sendo k um número inteiro. Suponha que a planta possua k^2 salas triangulares ao invés de 36. Se um visitante do museu quiser visitar apenas uma vez cada sala, qual é o número máximo de salas que ele consegue visitar? Escreva a resposta em termos de k .

Solução:

- Considere as salas do museu pintadas de branco e rosa na forma abaixo



O caminho que alguém percorrer no museu deve respeitar o seguinte: se está em uma sala rosa a próxima a ser visitada é uma branca, e vice-versa. Ao todo existem 21 salas rosas e 15 salas brancas. Então o número máximo de salas visitadas é 31. Um caso em que se visita 31 salas é desenhado abaixo



Critérios:

- Argumentou que o número de salas visitadas tem que ser menor ou igual à 31: **+4 pontos**
 - Mostrou que existe um caminho onde percorria 31 salas: **+ 4 pontos**
- b) Usando a mesma ideia que acima, sendo k um número inteiro, temos ao todo k^2 salas. Podemos pintá-las da mesma forma que acima e teremos que o número de salas rosas será $\frac{1}{2}k(k+1)$ e o número de salas brancas será $\frac{1}{2}k(k-1)$. Logo o número máximo de salas a serem visitadas será

$$\frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}k(k-1) = k^2 - k + 1$$

Critérios:

- Conseguiu chegar na fórmula correta: **+ 12 pontos**