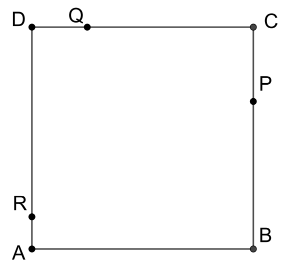
1. O quadrado $ABCD$ abaixo tem área $144\,cm^2$ e seus lados satisfazem $BC = 3PC$, $CD = 4DQ$ e $AD = 5AR$ (*notação: dados dois pontos X e Y, denotamos a medida do segmento que liga X à Y por XY*).



Responda o que se pede, justificando todas as respostas:

(a) Qual é a área do triângulo QCP?

(b) Qual é a área do quadrilátero $RPBA$?

(c) Qual é a área do triângulo QPR ?

Solução:

a) Como o quadrado $ABCD$ tem área de $144\,cm^2$ temos que cada um de seus lados medem $12\,cm$, logo $CD = 12$. Como $CD = 4DQ$ temos $DQ = 3$. Como $CD = DQ + QC$ temos $QC = 9$. Da mesma forma, no lado BC temos $BC = 12$ logo, como $BC = 3PC$, temos $PC = 4$. Como o triangulo QCP é retângulo sua área é calculada por $QC.PC/2 = 18\,cm^2$.

Critérios:

- Calculou os lados dos triângulos corretamente: **+3 pontos**
- Chegou na resposta correta: **+2 pontos**

b) O quadrilátero $RPBA$ é um trapézio com base maior BP, base menor AR e altura AB, logo sua área é dada por $(BP + AR).AB/2$. Como $AD = 12$ e $AD = 5AR$ temos $AR = 12/5$. Como $BC = BP + PC$, pelo item anterior temos $BP = 8$. Como AB é um lado do quadrado temos $AB = 12$. Logo temos $(BP + AR).AB/2 = (8 + 12/5).12/2 = 312/5\,cm^2$.

Critérios:

- Calculou as bases do trapézio corretamente: **+3 pontos**
- Chegou na resposta correta: **+2 pontos**

c) Para calcular a área do triângulo QPR basta subtrair da área do quadrado por as áreas calculadas nos itens anteriores e também a área do triângulo DQR. Pelo primeiro item temos $DQ = 3$. Como $AD = AR + RD$, e pelo segundo item $AR = 12/5$ e $AD = 12$, temos $RD = 48/5$. Portanto a área do triângulo DQR é $RD.DQ/2 = 72/5$. Logo a área do triângulo QPR é $144 - 18 - 312/5 - 72/5 = 246/5\,cm^2$

Critérios:

- Encontrou a fórmula para calcular a área do triângulo QPR: **+5 pontos**
- Calculou a área do triângulo DQR corretamente: **+3 pontos**
- Chegou na resposta correta: **+2 pontos**

2. Sendo $n \geq 1$ um número natural, definimos o *fatorial* de n (notação: $n!$) como sendo o produto de todos os números naturais entre n e 1, isto é, $n! = n.(n-1)\ldots 3.2.1$. Se $n = 0$, definimos $0! = 1$. Por exemplo, $3! = 3.2.1 = 6$, $5! = 5.4.3.2.1 = 120$. Seja $a = 20! - 18!$ e faça o que se pede justificando:

   (a) Quantos divisores pares tem o número a ?

   (b) Quantos divisores ímpares tem a ?

Solução:

a) Temos que $a = 20! - 18! = 20.19.18! - 18! = (20.19 - 1).18! = 379.18!$. Fatorando o número a em primos temos

$$a = 379.18.17.\ldots.3.2.1 = 379.17.13.11.7^2.5^3.3^8.2^{16}.$$

Para um número b ser divisor par de a, o número b deve ser múltiplo de 2 e conter em sua fatoração em primos apenas os fatores que aparecem na fatoração em primos de a. Assim a quantidade de possibilidades para b é $2^4.3.4.9.16 = 27648$.

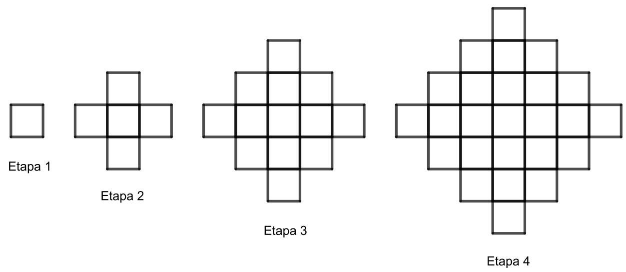
Critérios:

- Fatorou corretamente a: **+8 pontos**
- Mostrou a relação dos divisores pares de a com as possibilidades de fatores **+4 pontos**
- Chegou na resposta correta: **+2 pontos**

b) Para c ser um divisor ímpar de a, o número c deve conter em sua fatoração em primos apenas os fatores que aparecem na fatoração em primos de a, tirando os fatores 2. Assim a quantidade de possibilidades para c é $2^4.3.4.9 = 1728$.

- Mostrou a relação dos divisores ímpares de a com as possibilidades de fatores **+4 pontos**
- Chegou na resposta correta: **+2 pontos**

3. Usando quadrados de lado 1 formam-se as figuras abaixo em cada etapa, seguindo o padrão do desenho. Determine a última etapa na qual se utilizam menos de 2018 quadrados.



Solução:

Observe que os a quantidade de quadradinhos que estão na fileira do meio e acima desta fileira, de cada figura, é dado pela soma dos números ímpares de 1 até a quantidade ímpar de quadradinhos que aparece na fileira do meio: na primeira etapa tem 1, na segunda etapa tem 1 + 3, na terceira etapa tem 1+ 3 + 5, etc. Logo na etapa de número n a figura terá $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ quadradinhos na fileira do meio e acima desta fileira.

Analogamente, por simetria, temos que existem n^2 quadradinhos na fileira do meio e abaixo desta fileira, na etapa de número n.

Portanto a quantidade total de quadradinhos na etapa de número n é a soma das duas quantidades acima, menos a quantidade de quadradinhos da fileira do meio, $2n - 1$. Então a quantidade total de quadradinhos na etapa de número n é $n^2+n^2-(2n-1) = 2n^2-2n+1 = n^2 + (n - 1)^2$.

Para calcular a última etapa que possui menos de 2018 quadradinhos podemos aproximar $n^2 + (n - 1)^2$ pelo valor $n^2 + n^2 = 2n^2$ e verificar para qual n temos $2n^2 = 2018$. Neste caso teremos $n \approx 31$. Logo testando a quantidade total de quadradinhos, $n^2 + (n - 1)^2$, para valores próximos de 31 temos:

- Para $n = 30$ temos $n^2 + (n - 1)^2 = 30^2 + 29^2 = 1741$
- Para $n = 31$ temos $n^2 + (n - 1)^2 = 31^2 + 30^2 = 1861$
- Para $n = 32$ temos $n^2 + (n - 1)^2 = 32^2 + 31^2 = 1985$
- Para $n = 33$ temos $n^2 + (n - 1)^2 = 33^2 + 32^2 = 2113$

Logo a última etapa que possui menos de 2018 quadradinhos é a de número 32.

Critérios:

- Mostrou a fórmula geral para a quantidade de quadradinhos **+10 pontos**

- Mostrou o caminho para calcular a última etapa com menos de 2018 quadradinhos **+6 pontos**
- Concluiu o exercício corretamente: **+ 4 pontos**

4. Sendo $n \geq k \geq 0$ dois números naturais, definimos a *combinação de n com k* (notação: $\binom{n}{k}$) como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} \quad \text{(veja exercício 2. acima).}$$

Por exemplo,

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = 10, \binom{5}{0} = \frac{5!}{5!.(5-5)!} = \frac{5!}{5!.0!} = 1$$

Responda o que se pede, justificando todas as respostas:

(a) Mostre que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ para todos naturais $n \geq k \geq 1$.

(b) Explique por que $\binom{n}{k}$ é sempre um número natural.

(c) Calcule o máximo divisor comum dos números $\binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \binom{10}{3}, \ldots, \binom{10}{9}$.

(d) Calcule o máximo divisor comum em função de n das combinações abaixo

$$\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \ldots \binom{2n}{2n-1}.$$

Solução:

a) Pela definição temos

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!.(n-k)}{k!(n-1-k)!.(n-k)} + \frac{(n-1)!.k}{(k-1)!(n-k)!.k} =$$
$$= \frac{(n-1)!.(n-k) + (n-1)!.k}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Critérios:

- Mostrou a fórmula corretamente: **+3 pontos**

b) Vamos mostrar por indução que para todo n temos que $\binom{n}{k}$ é natural com $n \geq k \geq 1$. Note que pela definição $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{1}$ são todos números naturais. Suponha então que $\binom{n-1}{k}$ é natural com $n \geq k \geq 1$. Pela fórmula do item anterior temos que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ é um número natural pois é soma de dois naturais. Logo, por indução, o resultado segue.

Critérios:

- Mostrou o processo de indução corretamente: **+3 pontos** *c*) Observe que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para todo $n \geq k \geq 1$.

Logo a lista de números do enunciado possui números repetidos. Excluindo as repetições a lista fica

$$\binom{10}{1}, \binom{10}{2}, \binom{10}{3}, \binom{10}{4} \text{ e } \binom{10}{5}$$

Note também que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad \text{para todo } n \geq k \geq 1. \qquad (1)$$

Logo a lista acima fica

$$\frac{10}{1!}, \frac{10.9}{2!}, \frac{10.9.8}{3!}, \frac{10.9.8.7}{4!} \text{ e } \frac{10.9.8.7.6}{5!}$$

Como $\frac{10}{1!} = 10 = 2.5$ então as possibilidades de máximo divisor comum dos números acima são 1, 2, 5 ou 10. Note que $\binom{10}{2}$ é um número natural que não vai ter 2 como fator já que $\binom{10}{2} = \frac{10.9}{2!}$ e iremos cancelar o fator 2 do número 10 com o denominador 2. Note também que 5 não será um fator comum de $\binom{10}{5}$ pois iremos cancelar o único fator 5 do numerador com o único fator 5 que existe no denominador. Logo o máximo divisor comum entre os números é 1.

Critérios:

- Mostrou que na lista tinham números repetidos, ou calculou os números da lista: **+3 pontos**
- Chegou na resposta certa: **+2 pontos**

d) Seja $n = 2^k.{a_1}^{k_1}.{a_2}^{k_2}.{a_3}^{k_3}.\ldots.{a_r}^{k_r}$ a fatoração em primos do número n, onde os a_i são números primos ímpares distintos entre si e $k_i \geq 1$, $k_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \ldots, r$.

Como $2n = 2^{k+1}.{a_1}^{k_1}.{a_2}^{k_2}.{a_3}^{k_3}.\ldots.{a_r}^{k_r}$ note que $a_i < 2n$, portanto cada a_i é um número ímpar da lista $1, 3, 5, \ldots (2n-1)$.

Para cada $i = 1, \ldots, r$, usando a observação (1), acima temos que

$$\binom{2n}{a_i} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-a_i+1)}{a_i(a_i-1)(a_i-2)\ldots 2.1}.$$

No numerador da expressão acima temos multiplicações de a_i números e o único destes números que é múltiplo de a_i é o $2n$. No denominador da expressão acima, temos multiplicações de a_i números também, e o único destes números que é múltiplo de a_i é o a_i. Logo, como $\binom{2n}{a_i}$ é um número natural, os fatores a_i se cancelam no numerador e denominador e $\binom{2n}{a_i}$ não será divisível por a_i, para cada $i = 1, \ldots, r$.

Portanto, o máximo divisor d comum dos números combinatórios vai ser do tipo $d = 2^l$ onde $0 \leq l \leq k+1$.

Denote o número ímpar $N = {a_1}^{k_1}.{a_2}^{k_2}.{a_3}^{k_3}.\ldots.{a_r}^{k_r}$. Logo $n = 2^k.N$

Observe que para todo número ímpar m da lista $1, 3, 5, \ldots (2n-1)$ temos

$$\binom{2n}{m} = \frac{(2n)!}{(2n-m)!m!} = \frac{(2n)(2n-1)!}{(2n-m)!m(m-1)!} = \frac{2n}{m}\binom{2n-1}{m-1} = \frac{2^{k+1}.N.\binom{2n-1}{m-1}}{m}.$$

Logo como todo número combinatório é natural, na expressão acima, como m é ímpar, então m vai dividir $N.\binom{2n-1}{m-1}$. E assim, $\binom{2n}{m}$ será divisível por 2^{k+1} para todo número ímpar m da lista $1, 3, 5, \ldots (2n-1)$.

Portanto o máximo divisor comum será $d = 2^{k+1}$.

Critérios:

- Mostrou que o máximo divisor comum é da forma $d = 2^l$: **+5 pontos**
- Chegou na resposta certa: **+4 pontos**

5. Um número natural é chamado de *espelhado* se lendo ele da direta para esquerda, ou da esquerda para a direita, dá o mesmo. Por exemplo, 2772 e 39493 são espelhados; já 1231 não é espelhado.

   Marcelo escolheu dois números espelhados N_1 e N_2 de 4 dígitos cada. Somando estes números, para seu espanto, obteve um número S de 5 dígitos que é espelhado. Responda o que se pede justificando:

   (a) Encontre qual deve ser o dígito das unidades do número S.

   (b) Quais são todas as possibilidades para o número S?

   (c) Para cada caso encontrado no item b), encontre todos os possíveis valores de N_1 e N_2 que Marcelo escolheu.

Solução:

a) Como S é um número de 5 dígitos e N_1 e N_2 são de 4 dígitos cada então o número da dezena de milhar de S é 1, já que a maior soma possível de dois números de 4 dígitos é menor de 20.000. Como S é espelhado, o dígito da unidade também vai ser 1.

Critérios:

- Argumentou corretamente: **+4 pontos**
- Chegou na resposta certa: **+2 pontos**

b) Denotando $N_1 = abba$, $N_2 = cddc$ e $S = 1efe1$, onde a, b, c, d, e, f são dígitos entre 0 e 9, pelo item acima temos que a soma $a + c$ tem dígito da unidade como sendo 1. As possibilidades, à menos de mudança de ordem na soma, são $a = 2$ e $c = 9$, $a = 3$ e $c = 8$, $a = 4$ e $c = 7$ ou $a = 5$ e $c = 6$. Em todos estes casos temos $a + c = 11$.

Vamos agora separar em alguns casos:

- Se $0 \le b+d \le 8$ então $1 \le b+d+1 \le 9$. Logo o dígito $e = b+d+1$ vai satisfazer $1 \le e \le 9$. O dígito f vai ser a soma $b+d$. Também teremos que o dígito e será o dígito da unidade da soma $a+c$, isto é, $e = 1$. Logo $b+d = 0$, e então $f = 0$. Portanto a possibilidade para soma S é $S = 11011$.
- Se $b + d = 9$ então $b + d + 1 = 10$. Logo o dígito e vai ser 0. O dígito f vai ser o dígito da unidade da soma $b + d + 1$, isto é $f = 0$ e também teremos que ter que e será o dígito da unidade da soma $a + c + 1$, isto é, $e = 2$. Portanto essa possibilidade não acontece.
- Se $10 \le b + d \le 18$ então $11 \le b + d + 1 \le 19$. Logo o dígito e vai ser o dígito da unidade de $b + d + 1$, e vai satisfazer $1 \le e \le 9$. O dígito f também vai ser dígito da unidade da soma $b + d + 1$, isto é, $1 \le f \le 9$. Também teremos que e será o dígito da unidade da soma $a + c + 1 = 12$, isto é, $e = 2$. Então o dígito da unidade de $b + d + 1$ é $e = f = 2$, isto é, $b + d + 1 = 12$, logo $b + d = 11$. Portanto a possibilidade para soma S é $S = 12221$.

Portanto as possibilidade para S são 11011 e 12221.

Critérios:

- Argumentou corretamente: **+4 pontos**
- Chegou na resposta certa: **+2 pontos**

c) De acordo com o item anterior temos:

- Se S é 11011, então $b + d = 0$, logo $b = d = 0$. Logo as possibilidades para (N_1, N_2), à menos de mudança de ordem na soma, são $(2002, 9009)$, $(3003, 8008)$, $(4004, 7007)$, e $(5005, 6006)$.
- Se S é 12221, então $b + d = 11$. Logo a possibilidades para b e d, à menos de mudança de ordem na soma são $b = 2$ e $d = 9$, $b = 3$ e $d = 8$, $b = 4$ e $d = 7$ ou $b = 5$ e $d = 6$. Portanto, as possibilidades para (N_1, N_2), à menos de mudança de ordem na soma, são:

  $(2222, 9999)$, $(2992, 9229)$, $(2332, 9889)$, $(2882, 9339)$, $(2442, 9779)$, $(2772, 9449)$, $(2552, 9669)$, $(2662, 9559)$,

  $(3223, 8998)$, $(3993, 8228)$, $(3333, 8888)$, $(3883, 8338)$, $(3443, 8778)$, $(3773, 8448)$, $(3553, 8668)$, $(3663, 8558)$,

  $(4224, 7997)$, $(4994, 7227)$, $(4334, 7887)$, $(4884, 7337)$, $(4444, 7777)$, $(4774, 7447)$, $(4554, 7667)$, $(4664, 7557)$,

  $(5225, 6996)$, $(5995, 6226)$, $(5335, 6886)$, $(5885, 6336)$, $(5445, 6776)$, $(5775, 6446)$, $(5555, 6666)$, $(5665, 6556)$.

Critérios:

- Encontrou as possibilidades da soma de $b + d$: **+2 pontos**
- Calculou todas as possibilidades: **+6 pontos**

6. Um matemático reformou a parede de sua casa com ladrilhos. A parede é quadrada e foi reformada colocando 21×21 (21 filas horizontais e 21 filas verticais) ladrilhos quadrados. O matemático usou ladrilhos de diversos modelos respeitando a seguinte regra:

   - Cada fila (linha ou coluna) da parede possui no máximo 6 ladrilhos de modelos diferentes.

   Responda o que se pede justificando

   (a) Para cada fila horizontal, a quantidade total de ladrilhos que aparecem pelo menos duas vezes é no mínimo 16.

   (b) Para cada fila horizontal, a quantidade total de ladrilhos que aparecem pelo menos três vezes é no mínimo 11.

   (c) Prove que existe uma modelo de ladrilho que aparece na parede do matemático em três filas horizontais e três filas verticais.

Solução:

a) Seja $Q_{\geq 2}$ a quantidade de ladrilhos que aparecem pelo menos duas vezes em uma fila horizontal. Suponha, por absurdo, que seja falso. Logo $Q_{\geq 2} < 16$. A quantidade de ladrilhos restantes nesta fila, isto é, a quantidade de ladrilhos que aparecem no máximo uma vez, $Q_{\leq 1}$, satisfaz $Q_{\geq 2} + Q_{\leq 1} = 21$. Portanto $Q_{\leq 1}$ vai satisfazer $Q_{\leq 1} > 5$. Dessa forma $Q_{\leq 1} \geq 6$. Como cada fila tem no máximo 6 ladrilhos de modelos diferentes, temos que $Q_{\leq 1} = 6$. Sendo assim de $Q_{\geq 2} + Q_{\leq 1} = 21$ teremos $Q_{\geq 2} = 16$, um absurdo.

Critérios:

- Argumentou corretamente: **+6 pontos**

b) Seja $Q_{\geq 3}$ a quantidade de ladrilhos que aparecem pelo menos três vezes em uma fila horizontal. Suponha, por absurdo, que seja falso. Logo $Q_{\geq 3} < 11$. A quantidade de ladrilhos restantes nesta fila, isto é, a quantidade de ladrilhos que aparecem no máximo duas vezes, $Q_{\leq 2}$, satisfaz $Q_{\geq 3} + Q_{\leq 2} = 21$. Portanto $Q_{\leq 2}$ vai satisfazer $Q_{\leq 2} > 10$. Dessa forma $Q_{\leq 2} \geq 11$. Como cada fila tem no máximo 6 ladrilhos de modelos diferentes, a quantidade de modelos diferentes dos ladrilhos que se repetem pelo menos duas vezes é igual à seis. Logo $Q_{\leq 2} = 11$ (6 modelos diferentes, sendo que 5 se repetem só 2 vezes e 1 uma vez) ou $Q_{\leq 2} = 12$ (6 modelos diferentes, sendo que 6 se repetem só 2 vezes). Para ambos os casos teremos $Q_{\geq 3} = 10$ ou $Q_{\geq 3} = 9$, absurdos.

Critérios:

- Argumentou corretamente: **+6 pontos**

c) Por simetria observe que o resultado do item b) vale também para filas verticais, ou seja, para cada fila vertical, a quantidade total de ladrilhos que aparecem pelo menos três vezes é no mínimo 11.

Analisando as filas horizontais, pelo item b), temos que a quantidade total de ladrilhos que aparecerem aparecem pelo menos três vezes nas filas horizontais $QH_{\geq 3}$ é pelo menos 21.11, isto é, $QH_{\geq 3} \geq 21.11$ (21 filas horizontais com pelo menos 11 ocorrências em cada).

Analogamente, por simetria, temos que a quantidade total de ladrilhos que aparecerem aparecem pelo menos três vezes nas filas verticais $QV_{\geq 3}$ é pelo menos 21.11, isto é, $QV_{\geq 3} \geq 21.11$ (21 filas verticais com pelo menos 11 ocorrências em cada).

Somando estas duas quantidades ficamos com $QH_{\geq 3} + QV_{\geq 3} \geq 21.11 + 21.11 = 21.22$, que é maior que a quantidade de ladrilhos da parede do matemático, 21.21. Portanto, pelo princípio da casa dos pombos, existe um modelo de ladrilho que:

- aparece em uma fila horizontal pelo menos três vezes, e
- aparece em uma fila vertical pelo menos três vezes.

Portanto este modelo aparece em três filas horizontais e três filas verticais.

Critérios:

- Argumentou que vale para filas verticais: **+2 pontos**
- Concluiu o exercício corretamente: **+6 pontos**