UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Programa de Pós-Graduação em Matemática
EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ÁLGEBRA
15/12/2017

Salvo menção em contrário, nesta prova $\mathbf{k}$ denotará um anel comutativo e A denotará uma $\mathbf{k}$-álgebra; $M = M_A$ indica que M é A-módulo à direita, $M = {}_AM$ indica que M é A-módulo à esquerda, e "A-módulo" significa "A-módulo à esquerda".

Questões

1. Considere o diagrama comutativo de A-módulos e aplicações A-lineares com linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   (a) Mostre que existe um único morfismo $u : L \to L'$ que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   (b) Mostre que se v é um isomorfismo então $\mathrm{Ker}(w) \simeq \mathrm{Coker}(u)$. Conclua que, neste caso, w é monomorfismo se e somente se u é epimorfismo.

Para as questões (2) e (3) considere $\mathbf{k}$ um corpo, A a $\mathbf{k}$-álgebra de matrizes

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c \in \mathbf{k} \right\}$$

e $E_{1,1}$, $E_{2,2}$ os idempotentes

$$e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Mostre que
   (a) Os A-módulos $Ae_{1,1}$, $Ae_{2,2}$ são projetivos;
   (b) Nem todo A-módulo projetivo é livre.

3. Sendo $e_{1,1}$ e $e_{2,2}$ como acima,
   (a) Mostre que $\mathrm{Hom}(Ae_{1,1}, Ae_{2,2}) = 0$.
   (b) Construa uma sequência exata de A-módulos

$$0 \longrightarrow Ae_{2,2} \longrightarrow Ae_{1,1} \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

   que não cinde (onde C é um A-módulo apropriado).
   (c) Mostre que $Ae_{2,2}$ não é um A-módulo injetivo.
   (d) Mostre que A não é Morita equivalente a uma álgebra semissimples.

4. Seja A uma $\mathbf{k}$-álgebra e P um A-módulo. Mostre que

   (a) Se P é finitamente gerado então existe um epimorfismo $f : A^n \to P$ para algum inteiro positivo n;

   (b) Se P é projetivo, finitamente gerado, então existe um morfismo não-nulo de A-módulos $\gamma : P \to A$;

   (c) Se A é um domínio de ideais principais e P é um A-módulo projetivo, finitamente gerado e indecomponível então P e A são isomorfos como A-módulos.