Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Álgebra Linear Aplicada

- Aluno: ____

- Data: 08/03/2021

- Banca examinadora:

  1. Professor Geovani Nunes Grapiglia
  2. Professor Leonardo Silva de Lima
  3. Professor Lucas Garcia Pedroso

- Instruções:

  1. Apresente suas demonstrações de maneira detalhada.
  2. A prova tem duração de 3 horas e 45 minutos, incluindo o tempo para digitalização e envio à banca.

Questões:

1. (20 pontos) Faça o que se pede nos seguintes itens:

   (a) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não-singular. Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$, mostre que $A + uv^T$ é não-singular se, e somente se, $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$. Além disso, verifique a igualdade

   $$\left(A + uv^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}. \tag{1}$$

   (b) Dados $y, s \in \mathbb{R}^n$, suponha que $(y - Bs)^T s \neq 0$, com $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sendo uma matriz simétrica e definida positiva. Identifique condições sob as quais a matriz

   $$B^+ = B + \frac{(y - Bs)(y - Bs)^T}{(y - Bs)^T s} \tag{2}$$

   é não-singular e, nesse caso, mostre que

   $$\left(B^+\right)^{-1} = B^{-1} + \frac{(s - B^{-1}y)(s - B^{-1}y)^T}{(s - B^{-1}y)^T y} \tag{3}$$

2. (20 pontos) Suponha que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica e que

   $$Q^T A Q = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right), \tag{4}$$

com $Q = [q_1 \ \ldots, q_n]$ ortogonal e

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|. \tag{5}$$

Se as sequências $\left\{q^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\left\{\lambda^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}$ são geradas pelo **Método das Potências** com

$$q^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i, \quad \text{com } a_1 \neq 0, \tag{6}$$

mostre que

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| \leq |\lambda_n - \lambda_1| \left[\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^2\right] \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k} \tag{7}$$

3. (20 pontos) Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com SVD

$$A = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j u_j v_j^T,$$

seja

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j u_j v_j^T, \quad k < n.$$

Mostre que:

(a) $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

(b) $\|A - A_k\|_F^2 = \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_j^2$.

4. (20 pontos) Dados dois subespaços $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^n$ com $\dim(\mathcal{S}_1) = \dim(\mathcal{S}_2)$, define-se a distância entre $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$:

$$\operatorname{dist}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \|P_1 - P_2\|_2, \tag{8}$$

onde P_i é a matriz de projeção ortogonal sobre $\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2$. Sejam $W, Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes ortogonais particionadas como

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix},$$

com $W_1, Z_1 \in \mathbb{R}^{n\times k}$ e $W_2, Z_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-k)}$. Se $\mathcal{S}_W = \operatorname{Im}(W_1)$ e $\mathcal{S}_Z = \operatorname{Im}(Z_1)$, mostre que

$$\operatorname{dist}(\mathcal{S}_W, \mathcal{S}_Z) = \|W_1^T Z_2\|_2 = \|Z_1^T W_2\|_2.$$

5. (20 pontos) Faça uma dissertação sobre o tema "Fatoração QR". A dissertação deve englobar os seguintes tópicos:

(i) Cálculo da Fatoração QR Incompleta.

(ii) Cálculo da Fatoração QR Completa.

(iii) Aplicações da Fatoração QR.