UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada
Exame de Qualificação em Análise Numérica e da disciplina EMA708
01/12/2016

NOME: ____

Instruções:
1. Resolva **seis** das nove questões abaixo.
2. A prova deve ser entregue até 17:00.
3. Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
4. Justifique rigorosamente cada resposta.

Questões:

1. Dadas as equações normais $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ e uma norma matricial $\|\cdot\|$ induzida por uma norma vetorial $\|\cdot\|$, encontre um limitante superior para o erro relativo da solução do sistema perturbado

$$A^T A(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = A^T\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$$

em termos do erro relativo do lado direito do sistema.

2. Sejam $x_0 < x_1 < \ldots x_n \in [a, b]$ e

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad 0 \le i \le n,$$

os polinômios de Lagrange de grau n associados a estes pontos. Prove que $l_0(x)+l_1(x)+\ldots+l_n(x) = 1$.

3. Sejam $\tilde{I}_0(f) = w_0 f(x_0)$ e $\tilde{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)(1 + x)\,dx$. Encontre x_0 e w_0 tais que $\tilde{I}_0(p) = \tilde{I}(p)\ \forall p \in I\!P_1$, sendo $I\!P_n$ o espaço dos polinômios de grau $\le n$.

4. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função de classe C^4 e $h > 0$.
   (a) Escreva, em termos das funções de interpolação de Lagrange, o polinômio p de grau 2 que interpola de f nos pontos $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ e $x_2 = h$.
   (b) Encontre w_i, $i = 0, 1, 2$, tais que

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \tag{1}$$

   se f for um polinômio de grau menor ou igual a 2.
   (c) Generalize (1) mostrando que existe $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - (w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)) \right| \le Ch^4.$$

5. Dado um número natural n, sejam $f(x) = x^{2n}$, $\{q_0, \ldots, q_n\}$ a base do espaço $I\!P_n$ definida por $q_i(x) = x^i$, $i = 0, \ldots, n$, e seja $f_n(x) = a_0 q_0(x) + \ldots + a_n q_n(x)$ a solução do problema

$$\|f - f_n\|_w \le \|f - p\|_w \quad \forall p \in I\!P_n, \qquad \|u\|_w^2 = (u, u)_w, \quad (u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)x\,dx.$$

Os coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ podem ser obtidos pela solução de um sistema linear $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, em que $\boldsymbol{x} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]^T$. Encontre os coeficientes $A_{i,j}$ da matriz A e os coeficientes b_j do vetor $\boldsymbol{b}$ deste sistema linear.

6. Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ tal que $P = \text{diag}(A)$ é inversível. Mostre que se o método de Jacobi

$$Px^{(k+1)} = (P - A)x^{(k)} + b$$

é convergente para qualquer $x^{(0)} \in I\!R^n$, e se $0 < \omega \leq 1$, então o método JOR

$$\begin{cases} P\tilde{x} = (P - A)x^{(k)} + b \\ x^{(k+1)} = \omega\tilde{x} + (1-\omega)x^{(k)} \end{cases}$$

também é convergente para qualquer $x^{(0)} \in I\!R^n$.

7. Seja $A \in I\!R^{n\times n}$ tal que $A = (1+\omega)P - (N + \omega P)$, sendo que $P^{-1}N$ é não-singular e $P^{-1}N$ possui autovalores λ_i, $i = 1 \ldots n$, $1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Considere o método iterativo

$$(1+\omega)P\mathbf{x}^{(k+1)} = (N + \omega P)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k > 0. \tag{2}$$

   (a) Encontre B e $\mathbf{v}$ tais que o método iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}$ seja equivalente ao método (2), e mostre que a solução x do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfaz $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{v}$.

   (b) Para quais valores de $\omega \in I\!R$ o método iterativo (2) converge para a solução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ independentemente do vetor inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in I\!R^n$?

8. As equações que definem o método de gradientes conjugados são

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}, \tag{3}$$
$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}, \tag{4}$$

sendo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ e $p^{(0)} = r^{(0)}$. Deduza as fórmulas para os coeficientes α_k e β_k, observando que $x^{(k+1)}$ minimiza o funcional $\Phi(v) = (1/2)v^TAv - v^Tb$ no conjunto $\{v = x^{(k)} + \alpha p^{(k)}\}$ e que as direções $p^{(0)}, p^{(1)}, \ldots$ são A-conjugadas.

9. Mostre que a solução das equações normais $A^TAx = A^Tb$ minimiza o funcional $J(v) = \|b - Av\|_2$.

BOA PROVA!