Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Análise em $\mathbb{R}^n$

- Data e horário: 28/08/2020 - 14h00mim
- Banca examinadora:
  1. Ademir Alves Ribeiro
  2. Fernando de Ávila Silva
  3. Cleber de Medeira
- Instruções:
  1. A prova tem uma duração de 03h45min e vale 100 pontos;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. As questões estão propostas em 3 grupos. Deverão ser resolvidas exatamente 5 questões, sendo pelo menos uma questão de cada grupo;
  4. Deverá ser enviado um único arquivo com as resoluções das questões escolhidas, na mesma ordem em que estão propostas. O arquivo deve ser em formato pdf, nomeado como Qualificacao_Analise_Nome.pdf;
  5. A resolução da prova deverá ser enviada para os seguintes e-mails:
  ademir.ribeiro@ufpr.br
  fernando.avila@ufpr.br
  clebermedeira@ufpr.br

Questões do Grupo 1:

(1a) (20 pontos) Considere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno arbitrário em $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ a norma induzida por este produto interno. Sejam $K, F \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, com K compacto e F fechado. Mostre que se $K \cap F = \emptyset$, então existem $u \in \mathbb{R}^n$ unitário e $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ tais que a faixa $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq \langle u, x \rangle \leq \beta\}$ separa os conjuntos K e F, isto é, $\langle u, x \rangle \leq \alpha$ para todo $x \in K$ e $\langle u, x \rangle \geq \beta$ para todo $x \in F$.

(1b) (20 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua. Mostre que $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$ se, e somente se, $f^{-1}(K)$ é compacto para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que uma função satisfazendo estas condições é uma aplicação fechada.

(1c) (20 pontos) Sejam $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ e $a \in \text{int}(B) - \{0\}$. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = (1 - \|x\|)a + x$.

(i) Mostre que f é injetiva, que $f(B) \subset B$ e que $f(\mathbb{R}^n - B) \subset \mathbb{R}^n - B$.

(ii) Dado $y \in \mathbb{R}^n - \{a\}$, mostre que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|(1-\gamma)a + \gamma y\| = 1. \tag{1}$$

Definindo $x = \left(\dfrac{1}{\gamma} - 1\right) a + y$, mostre que $f(x) = y$ e que γ satisfazendo (1) é único.

(iii) Mostre que f é um homeomorfismo.

Questões do Grupo 2:

(2a) (20 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável e suponha que para algum $b \in \mathbb{R}^n$ o conjunto $f^{-1}(b)$ possui um ponto de acumulação $a \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ não é sobrejetiva. Apresente exemplo de uma bijeção $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, tal que $f'(x)$ tem posto 1 para uma infinidade não enumerável de pontos.

(2b) (20 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^n$.

(i) Mostre que existem $\delta, M > 0$ tais que $\|f(x) - f(a)\| \leq M\|x - a\|$ para todo $x \in B(a, \delta)$.

(ii) Existem $\delta, M > 0$ tais que $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$ para todos $x, y \in B(a, \delta)$?

(2c) (20 pontos) Considere $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^3$, escalares $a > b > c > 0$ e o elipsóide $E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1\right\}$.

(i) Justifique a existência, sem calcular ainda, de um ponto $x^* \in E$ mais próximo da origem do que todos os outros pontos de E e de $\tilde{x} \in E$ mais distante da origem do que todos os outros pontos de E.

(ii) Definindo $f, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \|x\|^2$ e $h(x) = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} - 1$, justifique a existência de $\lambda^*, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ tais que (x^*, λ^*) e $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ são soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla h(x) \\ h(x) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

que tem 4 equações e 4 incógnitas.

(iii) Encontre todas as soluções do sistema (2) e classifique cada uma, dizendo se é minimizador (local/global) ou maximizador (local/global) da função f restrita ao elipsóide E, ou ainda se tal solução não é nem minimizador nem maximizador.

Questões do Grupo 3:

(3a) (20 pontos) Considere escalares $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tais que $a_i < b_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, o bloco $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ e uma função limitada $f : A \to \mathbb{R}$. Denote o gráfico de f por $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A,\ y = f(x)\}$.

- (i) Mostre que se f é integrável, então $\mathrm{vol}(G) = 0$.
- (ii) Apresente uma função $f : [0, 1] \to [0, 1]$, limitada e não integrável, cujo gráfico tem volume zero.

(3b) (20 pontos) Considere escalares $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tais que $a_i < b_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, o bloco $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ e uma função limitada $f : A \to \mathbb{R}$. Denote por $\omega(x)$ a oscilação de f no ponto $x \in A$ e $E_\gamma = \{x \in A \mid \omega(x) \geq \gamma\}$.

- (i) Mostre que para todo $\gamma > 0$, o conjunto E_γ é compacto.
- (ii) Mostre que f é integrável se, e somente se, $\mathrm{vol}(E_\gamma) = 0$ para todo $\gamma > 0$.

Boa Prova