Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Análise em $\mathbb{R}^n$

- Data e horário: 12/03/2021 - 14h00mim
- Banca examinadora:
  1. Ademir Alves Ribeiro
  2. Fernando de Ávila Silva
  3. Cleber de Medeira
- Instruções:
  1. A prova tem uma duração total de 03h45min (incluindo o tempo de digitalização e envio) e vale 100 pontos;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. Deverão ser escolhidas e resolvidas exatamente 5 questões;
  4. Deverá ser enviado um único arquivo com as resoluções das questões escolhidas, na mesma ordem em que estão propostas. O arquivo deve ser em formato pdf, nomeado como qualif_analise_Nome.pdf;
  5. A resolução da prova deverá ser enviada para os seguintes e-mails:
     ademir.ribeiro@ufpr.br
     fernando.avila@ufpr.br
     clebermedeira@ufpr.br

Questões:

1. (20 pontos) Considere $X = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 \neq 0\}$. Mostre que $\overline{X} = \mathbb{R}^4$.

2. (20 pontos) Considere os conjuntos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\} \quad \text{e} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\}.$$

   Mostre que não existe um homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(A) = B$, mas que os conjuntos A e B são homeomorfos.

3. (20 pontos) Considere constantes $a, b \in \mathbb{R}$, com $a > 0$. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_2 + e^{x_1^2+x_2^2}$ tem um único ponto crítico e que este ponto é minimizador global de f.

4. (20 pontos) Considere uma constante $\gamma \in (0,1)$ e suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja uma função diferenciável tal que $f(\gamma x) = \gamma f(x)$ para todo $x \neq 0$.

   (a) Mostre que $f(0) = 0$;

   (b) Mostre que f é linear;

   (c) Use o que foi provado neste exercício para mostrar que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}, \text{se } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, \text{se } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$ não é diferenciável na origem.

5. (20 pontos) Seja $a \in U$ um ponto crítico de uma função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que a matriz hessiana de f seja invertível no ponto a. Mostre que existe um aberto V, com $a \in V \subset U$, no qual não há outros pontos críticos de f.

6. (20 pontos) Sejam $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ duas funções não-negativas e não-decrescentes. Mostre que a função $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $h(x,y) = f(x)g(y)$ é integrável.

Boa Prova