UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Qualificação. Equações Diferenciais Parciais. 10/03/2017

Professores: Pedro Danizete Damázio, Cleber de Medeira e Ailín Ruiz de Zárate

NOME: ____

Instruções:
1. A prova deve ser entregue até 16:30.
2. Não é permitido o uso de calculadoras e telefones celulares.
3. Justifique rigorosamente cada resposta.

Questões:

1. **(2 pontos)** Considere o problema de valor inicial (PVI) dado pela Equação de Burgers invíscida,

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(x,0) = F(x), \end{cases}$$

onde $F \in C^1(\mathbb{R})$ e F possui derivada negativa em algum intervalo não vazio. Resolva os seguintes itens:

(a) Escreva e resolva o sistema de equações características para os pontos da curva $\Gamma : x = s,\ t = 0,\ z = F(s)$.

(b) Escreva a relação implícita envolvendo u e F e indique qual é o tempo crítico para o qual não existe mais solução $u(x,t)$ no sentido clássico.

2. **(2 pontos)** Seja $u(x,y)$ a solução da equação

$$a(u_x, u_y)u_{xx} + 2b(u_x, u_y)u_{xy} + c(u_x, u_y)u_{yy} = 0.$$

Dada a transformação de coordenadas

$$\xi = u_x(x,y), \qquad \eta = u_y(x,y),$$

introduza as novas variáveis independentes ξ, η e uma nova função incógnita ϕ como sendo

$$\phi = xu_x + yu_y - u.$$

Prove que $\phi(\xi,\eta)$ satisfaz:

$$x = \phi_\xi, \qquad y = \phi_\eta,$$

e a equação diferencial linear

$$a(\xi,\eta)\phi_{\eta\eta} - 2b(\xi,\eta)\phi_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)\phi_{\xi\xi} = 0.$$

3. **(3 pontos)** Considere o Problema de Dirichlet em um domínio Ω, subconjunto aberto, conexo e limitado de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\bar{\Omega}\right), & \\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f, & f \in C(\partial\Omega). \end{cases}$$

(a) Enuncie e demonstre o Princípio do Máximo para o problema acima.

(b) Com ajuda do item anterior, prove que se a solução existir, então é única.

4. **(3 pontos)** Considere o problema de condução de calor em uma barra infinita com temperatura inicial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, função limitada e contínua:

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,+\infty)) \text{ limitada} \\ u_t = u_{xx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), \ \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Ache a candidata a solução. Escreva a candidata achada como convolução envolvendo o Núcleo do calor.

(b) Prove que a candidata a solução é de fato solução, ou seja, prove que u pertence ao espaço de funções escolhido, satisfaz a EDP e a condição inicial.

Pode utilizar sem demonstrar que o núcleo do calor é uma identidade aproximada de classe C^∞, o teorema de convergência uniforme nos compactos da convolução de uma função contínua e limitada com o núcleo do calor e a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

□□□