Universidade Federal do Paraná - UFPR
Setor de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Aluno:

Instruções:

- Escolha e resolva apenas três questões da Parte 1.
- Escolha apenas uma das questões dissertativas da Parte 2.
- No final da prova tem algumas fórmulas que você pode precisar.

Exame de Qualificação

Parte 1

1. O objetivo desta questão é determinar uma solução para o problema do calor em uma barra infinita com convecção e coeficiente de difusão variável com o tempo:

$$(P) := \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + \beta u_x + w(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = f(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para isso primeiro trataremos do problema homogêneo ($w(x,t) = 0$), em seguida aplicaremos o princípio de Duhamel. Siga o seguinte o roteiro:

(a) Use a transformada de Fourier para determinar uma candidata a solução para o problema homogêneo

$$(P_h) := \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + \beta u_x, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Prove que a candidata a solução de (P_h), obtida no item anterior, é de fato solução, isto é, satisfaz a EDP (P) e a condição inicial $u(x,0) = f(x)$. Deixe claro quais são as hipóteses sob f e β.

(c) Escreva a solução de (P) como sendo a soma de uma solução de um problema homogêneo mais uma solução com dados iniciais nulos.

(d) Determine $u(x,t)$ solução de (P).

2. (a) Mostre que $L^2(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, é um espaço vetorial normado e completo com respeito à norma $\|f\|_2 = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$. Conclua que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

(b) Caracterize os elementos do espaço dual (topológico) de $L^2(\Omega)$.

3. Nos itens abaixo, decida se a afirmação feita acerca de convergências de sequências nos espaços $L^p(\mathbb{R})$, com $1 \leq p < \infty$, é **Verdadeira** ou **Falsa** e justifique.

   (a) Se $f_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\chi_{[0,n]}$ então f_n converge uniformemente para $f \equiv 0$.

   (b) Se $f_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\chi_{[0,n]}$ então f_n converge em medida para $f \equiv 0$.

   (c) Se $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$ então f_n converge q.t.p. para $f \equiv 0$.

   (d) Se $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$ então f_n converge em norma para $f \equiv 0$.

4. Sejam X, Y espaços de Banach e $B(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares limitados. Use o roteiro que segue para mostrar que os elementos sobrejetores de $B(X,Y)$ formam um subconjunto aberto neste espaço.

   Notação: os elementos indicados por x_j e y_j pertencem a X e Y, respectivamente; $\bar{B}_X(0;r)$ representa a bota fechada em X de centro 0 e raio r.

   (a) Se $T \in B(X,Y)$ é sobrejetor, mostre que existe $C > 0$ de forma que para todo $\|y_1\| \leq 1$, existe x_1 com $Tx_1 = y_1$ e $\|x_1\| \leq C\|y_1\|$. (Dica: Use o Teorema da Aplicação Aberta.)

   (b) Seja $S \in B(X,Y)$, com $\|T - S\| \leq 1/(2C)$. Mostre que:

      i. Se $y_2 = (T-S)x_1$, então $\|y_2\| \leq 1/2$.

      ii. Existe $\|x_2\| \leq C/2$ com $Tx_2 = y_2$.

      iii. Se $y_3 = (T-S)x_2$, então $\|y_3\| \leq 1/2^2$.

   (c) Usando indução, encontre:
$$\|x_j\| \leq \frac{C}{2^{j-1}},$$
$$Tx_j = y_j,$$
$$y_{j+1} = (T-S)x_j.$$
   Mostre que $\|y_{j+1}\| \leq 1/2^j$.

   (d) Verifique que $y_1 = S(x_1 + \cdots + x_j) + y_{j+1}$.

   (e) Mostre que $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ está bem definida e que $\|x\| \leq 2C$.

   (f) Mostre que $y_1 = Sx$, daí conclua que $\bar{B}_Y(0;1) \subset S(\bar{B}_X(0;2C))$.

   (g) Conclua que S é uma aplicação aberta. Consequentemente, segue o resultado proposto.

Parte 2

5. Discorra sobre a Desigualdade de Poincaré e suas consequências em $W_0^{1,p}(I)$, onde $I \subset \mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$.

6. Discorra sobre as versões do Teorema de Hahn-Banach e apresente algumas aplicações.

7. Discorra sobre os conceitos de convergência forte, convergência fraca, reflexibilidade e compacidade em espaços de Banach.

Você pode precisar:

(a) $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

(c) Se $y \in \mathbb{R}$ e $f_y(x) = f(x-y)$, $x \in \mathbb{R}$, então $(f_y)\hat{}\,(k) = e^{-iky}\widehat{f}(k)$.

(d) Núcleo do calor para a equação $u_t = \alpha^2 u_{xx}$:

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$$