Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de qualificação de Otimização I

- Aluno: ______________________________
- Data: 03/08/2018
- Banca examinadora:
  1. Ademir Alves Ribeiro
  2. Alberto Ramos
  3. Elizabeth Wegner Karas
- Instruções:
  1. A prova tem duração de 3 horas;
  2. Justifique todas as suas respostas;
  3. Entregue a(s) folha(s) de questões junto com as soluções.

Questões:

1. (25 pontos) Considere o problema de minimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e fechado.

   (a) Mostre que se x^* é um minimizador local deste problema, então

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega. \tag{1}$$

   (b) Prove que se $x^* \in \Omega$ satisfaz a condição (1) e f é uma função convexa de classe $\mathcal{C}^1$, então x^* é uma solução global do problema.

2. (25 pontos) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha que existe $L > 0$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T(y - x)| \leq \frac{L}{2}\|y - x\|^2.$$

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$, seja $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ a sequência definida por:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{L}\nabla f(x^k).$$

   (a) Prove que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x^{k+1}) \leq \ f(x^k) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2.$$

   (b) Assumindo que f é limitada inferiormente, prove que $\|\nabla f(x^k)\| \to 0$.

3. (25 pontos) Mostre que o método de Newton não é afetado por mudança de variáveis, enquanto que o método de Cauchy sim. Mais precisamente, resolva os itens abaixo.

   (a) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz inversível e a mudança de variáveis $x = Py$. Defina a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $g(y) = f(Py)$. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ tais que $\bar{x} = P\bar{y}$. Mostre que o ponto $\bar{y}^+$, obtido por uma iteração do método de Newton com passo unitário para minimizar g, partindo de $\bar{y}$, satisfaz a relação $\bar{x}^+ = P\bar{y}^+$, onde $\bar{x}^+$ é o ponto obtido por uma iteração do método de Newton com passo unitário para minimizar f, partindo de $\bar{x}$.

   (b) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, o ponto $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, a mudança de variáveis $x = Py$ com $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(y) = f(Py)$. Pede-se:

   - o ponto $\tilde{y} \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz a igualdade $\tilde{x} = P\tilde{y}$;
   - o ponto $\tilde{x}^+$ obtido com um passo do método de Cauchy com busca exata para minimizar f, partindo de $\tilde{x}$;
   - o ponto $\tilde{y}^+$ obtido com um passo do método de Cauchy com busca exata para minimizar g, partindo de $\tilde{y}$.
   - Verifique que $\tilde{x}^+ \neq P\tilde{y}^+$.

4. (25 pontos) Considere os problemas (P_i), com $i \in \{1, 2\}$, dados por

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1 \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega_i \end{array}$$

onde $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^3 + x_2 \leq 0, -x_1^3 - x_2 \leq 0, x_1 \leq 1\}$ e $\Omega_2 = \{x \in \Omega_1 \mid -x_1 \leq 0\}$. Pede-se:

   (a) Mostre que $\Omega_1 = \Omega_2$ e represente geometricamente o conjunto viável. Conclua que a origem é minimizador global de ambos os problemas.

   (b) Para qual desses dois problemas, a origem satisfaz as condições de KKT? Mencione e discuta as condições de qualificação associadas a cada problema.

   (c) O que você conclui dos itens anteriores?