VIII SIMPÓSIO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS da UFPR

25 a 27 de fevereiro de 2015

Resumos dos Trabalhos

Realização:

Departamento de Matemática da UFPR
Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR

Apoio:

UFPR 100 Anos 1912 - 2012

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico

CAPES

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

Dinâmica das soluções do sistema de Schrödinger-Debye em dimensões críticas

Adán J. Corcho

adan@im.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Resumo

Apresentaremos resultados recentes sobre a dinâmica das soluções para o problema de Cauchy associado ao sistema de Schrödinger-Debye (SD) em dimensões críticas, modelado pelas equações

$$\begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}\Delta u = uv, & t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^N \ (N = 2, 3, 4) \\ \mu v_t + v = \lambda |u|^2, & \mu > 0, \ \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & \end{cases} \tag{1}$$

onde u toma valores complexos e v toma valores reais.

Este modelo é visto como uma perturbação da equação cúbica de Schrödinger. Primeiro mostraremos a existência de soluções globais no espaço de energia $H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$, que foram obtidos fazendo um control cuidadoso do pseudo-hamiltoniano associado ao sistema. Por outro lado, provaremos a existência de soluções singulares no espaço de energia crítico $H^1(\mathbb{R}^4) \times H^1(\mathbb{R}^4)$. De maneira mais precisa, apresentaremos uma classe "ampla" de dados inicias nesse espaço de energia crítica tais que as respectivas soluções explodem em tempo finito para pequenos valores de μ. Posteriormente, reescalando o sistema com relação ao parâmetro μ obtemos resultados similares para qualquer μ positivo. Para poder mostrar a formação de singularidades foi fundamental obter uma identidade de tipo "viriel" que exigiu maior dificuldade técnica que a análoga no caso da equação cúbica de Schrödinger.

Esta palestra resume as ideias de trabalhos em colaboração com F. Oliveira (UNL, Lisboa) e J. D. Silva (IST, Lisboa).

Referências

[1] A. J. Corcho, F. Oliveira and J. D. Silva *Local and Global Well-Posedness for the Critical Schrödinger-Debye System,* Proceedings of the AMS, **141** (10), 3485–3499 (2013).

[2] G. Fibich and G. C. Papanicolau, *Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear Schrödinger in critical dimension,* SIAM J. Appl. Math., **60**, 183-240 (1999).

[3] A. C. Newell and J. V. Moloney, *Nonlinear Optics,* Addison-Wesley, 1992.

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática

Hipoeliticidade Global em Variedades Compactas

Alexandre Kirilov
akirilov@ufpr.br
DMAT – UFPR

Resumo

Recentemente iniciamos o estudo da hipoelipticidade global (GH) para a classe de operadores

$$L = D_t + C(t, x, D_x), \ \ (t, x) \in \mathbb{T} \times M, \tag{1}$$

sendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ o toro unidimensional, M uma variedade suave fechada munida de uma medida positiva dx e $C(t, x, D_x)$ um operador pseudodiferencial em M de ordem 1 que depende suavemente da variável periódica t.

Nossa hipótese fundamental é inspirada no trabalho de Greenfield-Wallach [1], no qual os autores investigam a (GH) de operadores diferenciais invariantes com respeito aos autoespaços de um operador diferencial elíptico normal E fixado. Tal hipótese viabiliza uma abordagem com base em expansões de Fourier para a caracterização de espaços funcionais envolvidos, seguindo os trabalhos de R. T. Seeley [4] e mais recentemente de J. Delgado e M. Ruzhansky [2, 3].

Nosso ponto de partida é análogo: fixamos um operador pseudodiferencial elítico $E(x, D_x)$ em M e assumimos que

$$[C(t, x, D_x), E(x, D_x)] = 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \tag{2}$$

Também assumimos que

$$C(t, x, D_x) \text{ é normal, ou seja, } \ C^*C = C\,C^*. \tag{3}$$

Nessa apresentação pretendo justificar a necessidade da hipótese de normalidade sobre o operador $C(t, x, D_x)$, introduzindo pequenas perturbações no operador L com operadores invariantes que não são normais.

Mais precisamente, consideraremos operadores da forma

$$L^{\varepsilon} = D_t + C^{\varepsilon}(t, x, D_x), \quad (t, x) \in \mathbb{T} \times M, \tag{4}$$

sendo $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $L^0 = L$ e L^{ε} é um operador invariante com respeito a E, para todo ε, mas que não é normal para $\varepsilon \neq 0$. Mostaremos que a (GH) para tais tipos de operadores, arbitrariamente próximos de operadores normais, pode falhar.

Este trabalho está sendo desenvolvido em colaboração com: Fernando de Ávila – UFPR e Todor Gramchev – Univ. Cagliari, Itália.

Referências

[1] Greenfield, Stephen J and Wallach, Nolan R, *Remarks on global hypoellipticity*, Transactions of the American Mathematical Society, 183, 153–164 (1973).

[2] J. Delgado and M. Ruzhansky, *Schatten classes on compact manifolds: kernel conditions*, Journal of Functional Analysis, 267, 772–798 (2014).

[3] J. Delgado and M. Ruzhansky, *Kernel and symbol criteria for Schatten classes and r-nuclearity on compact manifolds*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 352, 779–784 (2014).

[4] R. T. Seeley, *Integro-Differential Operators on Vector Bundles*, Transactions of the American Mathematical Society, 117, 167–204 (1965).

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

Caracterização do decaimento de soluções de equações dissipativas

César J. Niche
cniche@im.ufrj.br
Depto. de Matemática Aplicada - IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro

Resumo

As soluções de muitas equações dissipativas, tais como as de Navier-Stokes, MHD ou quase-geostrófica, verificam desigualdades de energia que implicam que as normas L^2 ou Sobolev dessas soluções decaiam no tempo. Através do método do Fourier Splitting, desenvolvido por María E. Schonbek [1], [2], [3], pode-se obter muitos resultados descrevendo a taxa de decaimento.

Para utilizar o Fourier Splitting, é necessário restringir os dados iniciais a subconjuntos específicos de L^2 ($L^p \cap L^2, 1 \leq p < 2$, por exemplo) ou conhecer o decaimento da solução da parte linear da equação. A pergunta que surge então é a seguinte: é possível conhecer o decaimento para qualquer dado inicial em L^2 sem restrições?

Nesta palestra descreveremos trabalhos recentes com M.E. Schonbek [4], [5] nos quais caracterizamos o decaimento, para todo dado inicial, para uma familia de equações dissipativas que inclui as de Navier-Stokes, várias aproximações compressíveis desta e a equação quase-geostrófica. Essa descrição está baseada no *decay character* $r^* = r^*(u_0)$ associado a cada dado inicial u_0 em L^2. O decay character é, essencialmente, "a ordem do dado inicial na origem do espaço de frequências". Além de caracterizar o decaimento, o decay character permite determinar dados iniciais que têm comportamento quantitativo e qualitativo diferente para certas equações e suas aproximações, como no caso das de Navier-Stokes e aproximações amortecidas compressíveis a esta.

Este trabalho foi realizado em colaboração com María E.Schonbek (UC Santa Cruz).

Referências

[1] M.E. Schonbek, *Decay of solutions to parabolic conservation laws*, Comm. Partial Differential Equations, 5(7):449–473, (1980).

[2] M.E. Schonbek, *L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal., 88(3):209–222, (1985).

[3] M.E. Schonbek, *Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations*, Comm. Partial Differential Equations, 11(7):733–763, (1986).

[4] C.J. Niche e M.E. Schonbek, *Decay characterization of solutions to dissipative equations*, aceito no J. London Math. Soc. (2015).

[5] C.J. Niche e M.E. Schonbek, *Comparison of decay of solutions to two compressible approximations to Navier-Stokes equations*, submetido (2015).

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

Decaimento das Soluções para uma Mistura de Sólidos Timoshenko Termoelástico

Félix Pedro Quispe Gómez
felixgomez@utfpr.edu.br
Departamento Acadêmico de Matemática, DAMAT - UTFPR

Resumo

Abordaremos o caso de uma viga de Timoshenko unidimensional composta por uma mistura de dois meios contínuos interagindo e que ocupam o intervalo $]0,\ L[$. As variáveis dependentes que formam as equações de Timoshenko serão representadas por φ e ψ. Quando se estuda a mistura de dois meios interagindo caracterizamos o deslocamento das partículas utilizando a seguinte notação $\varphi^1 = \varphi^1(x,\, t)$, $\psi^1 = \psi^1(x,\, t)$ e $\varphi^2 = \varphi^2(y,\, t)$, $\psi^2 = \psi^2(y,\, t)$ onde $x, y \in]0,\ L[$. Supondo que as partículas em nosso estudo ocupam a mesma posição no tempo $t = 0$ de modo que $x = y$. Ver os resultados em [1], [3] e [8] com explanações mais analíticas e aprofundadas sobre o assunto.

Denotamos por $\theta = \theta(x,\, t)$ a temperatura do material no ponto x e no instante t.

Sejam as equações dos tensores de estresse

$$S^1 = k_{11}(\partial_x \varphi^1 + \psi^1) + k_{12}(\partial_x \varphi^2 + \psi^2)$$
$$S^2 = k_{12}(\partial_x \varphi^1 + \psi^1) + k_{22}(\partial_x \varphi^2 + \psi^2)$$

e os correspondentes momentos para cada componente

$$M^1 = b_{11}\partial_x \psi^1 + b_{12}\partial_x \psi^2 - \beta_1 \theta$$
$$M^2 = b_{12}\partial_x \psi^1 + b_{22}\partial_x \psi^2 - \beta_2 \theta$$

Portanto as equações do movimento e a equação da energia podem ser escritas em termos

das funções φ, ψ e θ

$$\begin{aligned}
\rho_{11}\partial_t^2\varphi^1 + \alpha_1(\varphi^1 - \varphi^2) - \partial_x S^1 &= 0\\
\rho_{12}\partial_t^2\varphi^2 - \alpha_1(\varphi^1 - \varphi^2) - \partial_x S^2 &= 0\\
\rho_{21}\partial_t^2\psi^1 - \partial_x M^1 + \alpha_2(\psi^1 - \psi^2) + S^1 &= 0\\
\rho_{22}\partial_t^2\psi^2 - \partial_x M^2 - \alpha_2(\psi^1 - \psi^2) + S^2 &= 0\\
c\partial_t\theta - k\partial_x^2\theta + \beta_1\partial_{xt}^2\psi^1 + \beta_2\partial_{xt}^2\psi^2 &= 0
\end{aligned}$$

A seguir escrevemos as equações acima na forma de funções vetoriais, para isso consideramos as seguintes matrizes

$$\rho^i = \begin{bmatrix}\rho_{i1} & 0\\ 0 & \rho_{i2}\end{bmatrix} \qquad \varphi = \begin{bmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{bmatrix} \qquad \psi = \begin{bmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix}S^1\\ S^2\end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix}M^1\\ M^2\end{bmatrix} \qquad B_i = \alpha_i\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$$

Assim sendo, temos o sistema vetorial para as equações de movimento e energia

$$\begin{aligned}
\rho^1\partial_t^2\varphi - \partial_x S + B_1\varphi &= 0\\
\rho^2\partial_t^2\psi - \partial_x M + B_2\psi + S &= 0\\
c\partial_t\theta - k\partial_x^2\theta + \beta\cdot\partial_{xt}^2\psi &= 0
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas das expressões S e M obtemos

$$\rho^1\partial_t^2\varphi - K\partial_x(\partial_x\varphi + \psi) + B_1\varphi = 0 \tag{1}$$

$$\rho^2\partial_t^2\psi - B\partial_x^2\psi + K(\partial_x\varphi + \psi) + B_2\psi + \beta\,\partial_x\theta = 0 \tag{2}$$

$$c\partial_t\theta - k\partial_x^2\theta + \beta\cdot\partial_{xt}^2\psi = 0 \tag{3}$$

sistema sobre o qual faremos o nosso estudo.

O objetivo principal será obter condições sobre os coeficientes para garantir que o eixo imaginário esteja contido no conjunto resolvente. Logo, identificar as condições necessárias e suficientes para obter o decaimento exponencial das soluções do sistema (1) - (3). A técnica a ser utilizada é a de semigrupos e técnicas multiplicativas. Para atingir esse objetivo seguimos as ideias em Rivera et al. (2013) [7]

Referências

[1] R. J. Atkin and R. E. Craine; *Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development,* Quat. J. Mech. Appl. Math. 29, 209-243, (1976).

[2] A. Bedford and D. S. Drumheller; *Theory of immiscible and strucured mixtures,* Internat. J. Engrg Sci., 21, 863-960, (1983).

[3] A. Bedford and M. Stern; *A multi-continuum theory for composite elastic materials,* Acta Mechanica, 14, 85-102, (1972).

[4] A. E. Green and P. M. Naghdi; *A dynamical theory of interacting continua,* Internat. J. Engrg Sci., 3, 231-241, (1965).

[5] A. E. Green and P. M. Naghdi; *A note on mixtures,* Internat. J. Engrg Sci., 6, 631-635, (1968).

[6] A.E. Green and T.R. Steel; *Constitutive equations for interacting continua.* Internat. J. Engrg Sci., 4, 483-500, (1966).

[7] J. E. Rivera Muñoz, M. G. Naso and R. Quintanilla *Decay of solutions for a Mistures of Themoelastic one dimensional Solids*, Computers and Mathematics with Applications,, Vol.66(1), pp.41-55 (2013)

[8] D. Ieşan; *On the theory of mixtures of thermoelastic solids.* J. Thermal Stresses, 14, 389-408, (1991).

[9] D. Ieşan and R. Quintanilla; *Existence and continuous dependence results in the theory of interacting continua.* J. Elasticity, 35, 85-98, (1994).

[10] F. Martínez and R. Quintanilla; *Some qualitative results for the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids.* Collect. Math., 46, 263-277, (1995).

[11] K. R. Rajagopal and L. Tao; *Mechanics of Mixtures,* World Scientific, Singapore, 1995.

[12] T.R. Steel; *Applications of a theory of interacting continua,* Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 20, 57-72, (1967).

[13] Zenhg, S. *On the theory of mixtures of thermoelastic solids,* J. Thermal Stresses, 14, 389-408, (1991).

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

Hipoeliticidade Global para uma Classe de Operadores Pseudodiferenciais sobre Variedades Compactas

Fernando de Ávila Silva
favilasi@gmail.com
PPGM-UFPR

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar a Hipoeliticidade Global, abreviadamente (GH), para uma classe de operadores do tipo

$$L \doteq D_t + a(t)p(x, D_x) + ib(t)q(x, D_x), \quad (t, x) \in \mathbb{T} \times M, \tag{1}$$

sendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ o toro unidimensional, M uma variedade fechada e suave, $a, b \in C^\infty(\mathbb{T} : \mathbb{R})$ e $p(x, D_x), q(x, D_x)$ operadores pseudodiferenciais, de primeira ordem, auto-adjuntos definidos sobre M.

Inspirados no trabalho de Greenfield-Wallach [2], no qual os autores investigam a (GH) para operadores diferenciais que comutam com um operador diferencial elíptico E fixado, introduzimos a hipótese basilar em nosso trabalho:

Fixamos um operador normal elíptico $E(x, D_x)$ sobre M e exigimos que

$$[p(x, D_x), E(x, D_x)] = [q(x, D_x), E(x, D_x)] = 0. \tag{2}$$

Destacamos a seguir os principais resultados deste trabalho.

Teorema 0.1 (b não identicamente nula) *Seja L o operador (1) para o qual $p(x, D_x)$ e $q(x, D_x)$ satisfazem (2), sendo E um operador normal elíptico fixado. Denotando por ν_j, com $j \in \mathbb{N}$, os elementos da diagonal de $q(x, D_x)$ sobre os auto-espaços de E e assumindo $b \not\equiv 0$, obtemos os seguintes resultados:*

(a) *Se b não muda de sinal e a sequência $|\nu_j|$ diverge para o infinito então L é (GH);*

(b) *Se b muda de sinal e o crescimento de $|\nu_j|$ é super-logarítmico então L não é (GH);*

(c) *Se b muda de sinal e o crescimento de $|\nu_j|$ é no máximo logarítmico então o operador L pode ser (GH) ou não (GH).*

Teorema 0.2 ($b \equiv 0$) *Seja*

$$L = D_t + a(t)p(x, D_x), \quad (t, x) \in \mathbb{T} \times M, \tag{3}$$

com $p(x, D_x)$ satisfazendo (2). Denotando por μ_j, com $j \in \mathbb{N}$, os elementos da diagonal de $p(x, D_x)$ sobre os auto-espaços de E temos que: L é (GH) se, e somente se, a média a_0 de $a(t)$ sobre $\mathbb{T}$ é não-Liouville com respeito a sequência μ_j.

Definição 0.1 *Diremos que um número real a_0 é não-Liouville com respeito a uma sequência μ_j se existirem $\delta > 0$, $C > 0$ e $R \gg 1$ tais que*

$$\inf_{\ell \in \mathbb{Z}} |a_0 \mu_j + \ell| \geqslant C j^{-\delta}, \ \forall j \geqslant R. \tag{4}$$

Ressaltamos que um dos ingredientes cruciais da nossa abordagem é uma aplicação da fórmula de Weyl (crescimento no infinito dos autovalores de E) que descreve o comportamento assintótico das sequências μ_j e ν_j.

Este trabalho foi realizado em colaboração com:
Alexandre Kirilov (UFPR - Brasil) e-mail: akirilov@ufpr.br
Todor Gramchev (UNICA - Itália) e-mail: todor@unica.it

Referências

[1] Greenfield, Stephen J and Wallach, Nolan R, *Global hypoellipticity and Liouville numbers*, Proceedings of the American Mathematical Society, 31, 112–114 (1972).

[2] Greenfield, Stephen J and Wallach, Nolan R, *Remarks on global hypoellipticity*, Transactions of the American Mathematical Society, 183, 153–164 (1973).

[3] Hounie, Jorge, *Globally hypoelliptic and globally solvable first-order evolution equations*, Transactions of the American Mathematical Society, 252, 233–248 (1979).

[4] Shubin, Mihail Aleksandrovič, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer, 2001.

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

Sobre taxas de Decaimento de Equações Discretas de Volterra

Higidio Portillo Oquendo
higidio@ufpr.br
Universidade Federal do Paraná

Resumo

Neste trabalho estabelecemos taxas explicitas de decaimento para as soluções da equação discreta de Volterra de tipo convolução:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_{n-k},$$

onde o núcleo de Volterra (a_k) é uma sequência de termos não negativos satisfazendo a condição $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq 1$. Veremos que, em alguns casos, as soluções não decaem com a mesma rapidez que o núcleo de Volterra decai.

Referências

[1] J.A. Appleby, I. Gyori, D.W. Reynolds, *On exact convergence rates for solutions of linear systems of Volterra difference equations*, J. Difference Equ. Appl. 12 (2006) 1257-1275.

[2] K.S. Berenhaut, N.G. Vish, *Equations of convolution type with monotone coefficients*, Journal of Difference Equations and Applications 17 (2011) 555-566.

[3] P. Erdös, W. Feller and H. Pollard, *A property of power series with positive coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 201-204.

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

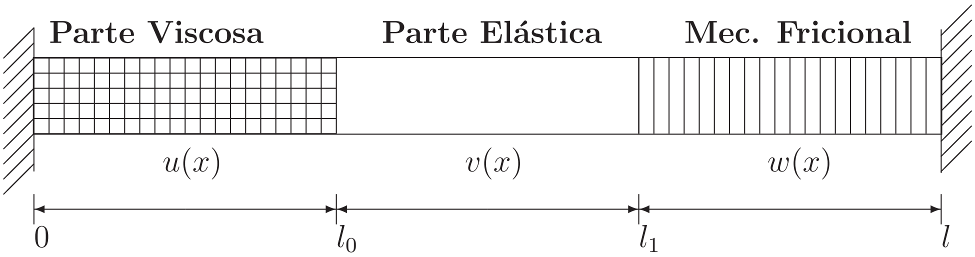
Estabilidade de sistemas dinâmicos com multiples mecanismos dissipativos

Jaime E. Muñoz Rivera
jemunozrivera@gmail.com
IM-UFRJ - LNCC

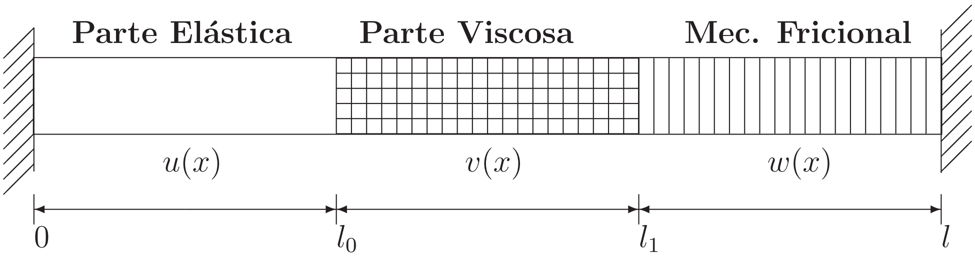
Resumo

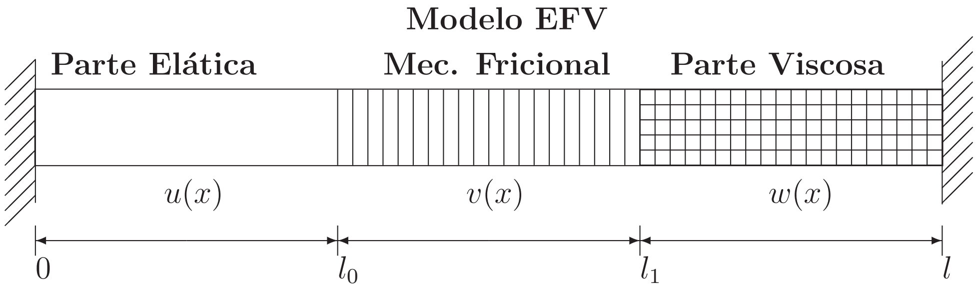
Neste trabalho estudaremos o efeito de diversos mecanismos dissipativos. Mostraremos que a soma destes mecanismos dissipativos não melhora a estabilização, pode acontecer o contrario. Isto é, que a estabilização seja muito mais lenta. Nesta apresentação mostraremos como devem ser distribuidos estes mescanismos para otimizar o tempo de estabilização. Os mecanismos que consideraremos nesta exposição são: Mecanismo viscoso tipo Kelvin-Voight e mecanismos tipo friccional.

Modelo VEF



Modelo EVF





Este trabalho foi realizado em colaboração com Mauricio Sepulveda, Universidade de Concepción - Chile e Octavio Vera Villagran, Universidade del Bio-Bio - Chile.

Referências

[1] A. Borichev and Y. Tomilov. *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups.* Mathematische Annalen. Vol. 347. 2(2009)455-478.

[2] K. Liu and Z. Liu. *Exponential decay of the energy of the Euler Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping.* SIAM Journal of Control and Optimization Vol. 36. 3(1998)1086-1098.

[3] M. Alves, J.E. Muñoz Rivera, Mauricio Sepúlveda and O. Vera Villagran. *The lack of exponential stability in certain transmission problems with localize kelvin-voigt dissipation.* SIAM Journal of Applied Mathematics Volume 74, Número 2, páginas 345 - 365 (2014).

Attractors for evolution processes defined in time-dependent metric spaces

Ma To Fu
matofu@icmc.usp.br
ICMC-USP

Resumo

In this talk we discuss some evolution equations which generate processes defined in time-dependent metric spaces. An existence theorem for pullback attractors is also presented.

Referências

[1] P. Kloeden, P. Marin-Rubio and J. Real, *Pullback attractors for a semilinear heat equation in a non-cylindrical domain*, J. Differential Equations, 244, 2062-2090 (2008).

[2] M. Conti, V. Pata and R. Temam, *Attractors for processes on time-dependent spaces. Applications to wave equations*, J. Differential Equations, 255, 1254-1277 (2013).

[3] T. F. Ma, P. Marin-Rubio and C. M. Surco-Chuño, *Pullback attractors for wave equations on moving boundary domains.* (Preprint 2015)

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

Higher-order Models for Unidirectional Water Waves; Derivation and Well-posedness Theory

Mahendra Panthee
mpanthee@ime.unicamp.br
IMECC, UNICAMP, Campinas

Resumo

Formally second-order correct, mathematical descriptions of long-crested water waves propagating mainly in one direction are derived. These equations are analogous to the first-order approximations of KdV- or BBM-type. The advantage of these more complex equations is that their solutions corresponding to physically relevant initial perturbations of the rest state are expected to be accurate on a much longer time scale. The initial-value problem for the class of equations that emerges from our derivation is then considered. A local well-posedness theory is straightforwardly established by way of a contraction mapping argument. A subclass of these equations possess a special Hamiltonian structure that may be used to show that the local theory can be continued indefinitely.

Este trabalho foi realizado em colaboração com J. Bona, X. Carvajal and M. Scialom.

Referências

[1] J. L. Bona, M. Chen M. and J.-C. Saut, *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media I. Derivation and linear theory*, J. Nonlinear Sci. **12** no. 4, 283–318 (2002).

[2] J. L. Bona, M. Chen M. and J.-C. Saut, *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media II. The nonlinear theory*, Nonlinearity **17** no. 3, 925–952 (2004).

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

GENERAL STABILITY FOR A CLASS OF VISCOELASTIC KIRCHHOFF PLATES

MARCIO A. JORGE DA SILVA

marcioajs@uel.br

Universidade Estadual de Londrina - UEL

Abstract

In this talk we present a result on the general stability to the following boundary value problem concerning to a nonlinear viscoelastic Kirchhoff plate equation

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \mathrm{div} F(\nabla u) - \displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\, ds = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u = \Delta u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{and} \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary $\partial\Omega$, $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is a vector field and the term $\mathrm{div}F(\nabla u)$ constitutes a lower order nonlinear perturbation of p-Laplacian type, namely, $F(z) \approx |z|^{p-2}z$, with $p \geq 2$, and the memory kernel $g \in C^1$ is supposed to satisfy the following conditions:

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s)\, ds > 0, \quad g'(t) \ \leq \ -\xi(t)g(t), \quad \forall\ t > 0,$$

where

$$\xi \in C^1, \quad \xi(t) > 0, \quad \xi'(t) \leq 0, \quad \left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| \leq \xi_0, \quad \forall\ t \geq 0.$$

for some $\xi_0 \geq 0$. The corresponding energy is given by

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{h(t)}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) + \int_\Omega f(\nabla u(t))\, dx,$$

where $\|\cdot\|_2$ means the usual norm in $L^2(\Omega)$, $h(t) := 1 - \int_0^t g(s)\, ds$, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a real valued function such that $F = \nabla f$, and

$$(g\Box\,\zeta)(t) := \int_0^t g(t-s)\|\zeta(t) - \zeta(s)\|_2^2 ds$$

Under suitable conditions on F, then problem (1) is well posed. Besides, the result on stability reads as follows:

Theorem 0.1 *Given any solution of the problem* (1)*, then there exist constants* $K > 0$ *and* $\gamma > 0$ *(depending on the size of weak initial data) such that*

$$E(t) \leq KE(0)\, e^{-\gamma \int_0^t \xi(s)\, ds}, \quad \forall\ t > 0.$$

References

[1] D. Andrade, M. A. Jorge Silva and T. F. Ma, *Exponential stability for a plate equation with p-Laplacian and memory terms.* Math. Methods Appl. Sci. 35 (2012), no. 4, 417-426.

[2] R. Barreto, E. C. Lapa and J. E. Muñoz Rivera, *Decay rates for viscoelastic plates with memory.* J. Elasticity 44 (1996), no. 1, 61-87.

[3] S. A. Messaoudi, *General decay of solutions of a viscoelastic equation.* J. Math. Anal. Appl. 341 (2008), no. 2, 1457-1467.

[4] S. A. Messaoudi, *General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source.* Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 8, 2589-2598.

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

Regularidade de autovalores de operadores elípticos sob perturbações de domínios não-suaves

Marcos Montenegro
msmontene@gmail.com
Universidade Federal de Minas Gerais

Resumo

O estudo de regularidade de autovalores de operadores elípticos com respeito a deformações do domínio é um problema clássico em Equações Diferenciais Parciais desde o final do século XIX e conta com uma extensa literatura. Formulamos e abordamos o problema em uma forma bastante genérica para autovalores simples, considerando perturbações suaves de domínios não-suaves e coeficientes. Em particular, estendemos a fórmula de Hadamard a operadores elípticos de segunda ordem.

Este trabalho foi realizado em colaboração com Julian Haddad.

Referências

[1] J. Haddad e M. Montenegro, *On differentiability of eigenvalues of second order elliptic operators on non-smooth domains*, Journal of Differential Equations, no prelo.

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

SHARP L^p-MOSER INEQUALITY ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

MARCOS TEIXEIRA ALVES
mtmarcos@gmail.com
UFPR

Resumo

In 1961, Moser [6] proved that solutions of certain elliptic equations of second order have the standard L^∞ norm increased by the standard L^p norm for all $p > 1$. The idea developed by Moser to prove that increase is based on an iteration process. The key point of this technique consists in connecting the PDE satisfied by the solution to inequality:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2(n+2)}{n}} dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \right)^{\frac{2}{n}}$$

where this inequality is valid for every function $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ and some constant $c > 0$. Our interest herein will be studying this inequality from the "optimal viewpoint".

Denote by $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ the classical Sobolev space. The *general Euclidean Moser inequality* states that there exists $A > 0$, such that for any function $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r \, dx \leq A \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx \right)^{\frac{p}{n}}, \qquad (M_E(A))$$

$1 \leq p$, $2 \leq n$ and $r = \frac{p(n+p)}{n}$. Define $A(p,n)^{-1} = \inf\limits_{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \{||\nabla u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} ||u||^{\frac{p^2}{n}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}; ||u||_{L^r(\mathbb{R}^n)} = 1\}$. The inequality $M_E(A(p,n))$ is called *optimal Euclidean Moser inequality* and the constant $A(p,n)$ is the *best constant* in this inequality. This optimal Moser constant was studied by Beckner in [1].

We present now the Riemannian case. Let (M,g) be a smooth, compact Riemannian manifold without boundary of dimension $n \geq 2$. Consider the extra parameter τ with $1 \leq \tau \leq p$. Using standard arguments, we obtain that there exists positive constants A, B such that for all u in the classical Riemannian Sobolev space $H^{1,p}(M)$, we have

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left(A \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}}, \qquad (M_R(A,B))$$

where $1 < p$ e $r = \frac{p(n+p)}{n}$.

Having two constants, the optimality can be defined in two ways. We follow the more interesting one from the PDE viewpoint (see chapters 4 and 5 of the book [4]). Define the *first Riemannian L^p-Moser optimal constant* by

$$A_{opt} = \inf\{A \in \mathbb{R} : \text{ there exists } B \in \mathbb{R} \text{ such that } M_R(A,B) \text{ is valid}\}.$$

Using an argument partition of unity, we can establish that the *first optimal Riemannian L^p-Moser inequality* means that there exists a constant $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ such that, for any $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left((A_{opt} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + C_\varepsilon \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}} ,$$

is valid for all $\varepsilon > 0$. Because $M_R(A_{opt}+\varepsilon, C_\varepsilon)$ holds, we can define $B_\varepsilon := \inf\{B \in \mathbb{R}; M_R(A_{opt}+\varepsilon, B) \ \textit{is valid}\}$.

Then, we mean that for all $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^r \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \leq \left((A_{opt} + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + B_\varepsilon \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \left(\int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{\tau}{n}} ,$$

is valid. Define $\mathcal{B} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon$. In contrast with the Euclidean case ($B_\varepsilon = 0$), the validity of the optimal inequality is delicate, since as $\varepsilon \to 0$ the corresponding B_ε might in principle go to infinity. In fact, when $\tau = p > 2$ there exists cases where the optimal inequality for Gagliardo-Nirenberg or Sobolev is not valid, depending on the geometry of (M, g), (see [2]). In this work we consider the parameter $\tau \leq \min\{p, 2\}$. The ideas used in our proof are already present in [3], whose key point is to use techniques explosion. However, we introduce a new way to study this explosion considering most appropriate for this rescheduling. The main objective is show that $\mathcal{B}$ is finite.

As an application of the optimal inequalities of Moser in Riemannian manifolds, we suggest the paper [5], where the authors obtained global existence theorems for Zakharov system in $\mathbb{T}^2$.

We now present the results already obtained:

Theorem 1. *Let (M, g) be a smooth, compact Riemannian manifold without boundary of dimension $n \geq 2$, $1 \leq \tau \leq p$, $1 < p$ and $r = \frac{p(n+p)}{n}$. If $1 \leq \tau \leq \min\{p, 2\}$, then $M_R(A_{opt}, B)$ is always valid for some B.*

Due to Theorem 1, we consider the *second optimal constant*, namely, $B_{opt} := \inf\{B; M_R(A_{opt}, B) \text{ is valid}\}$. A non-zero function realizing equality in $M_R(A_{opt}, B_{opt})$ is said to be an *extremal function*. Finally, we have

Theorem 2. *Let (M, g) be a smooth, compact Riemannian manifold without boundary of dimension $n \geq 2$, $1 \leq \tau \leq p$ and $1 < p$ and $r = \frac{p(n+p)}{n}$. If $1 \leq \tau < \min\{2, p\}$ then $M_R(A_{opt}, B_{opt})$ admits an extremal function and $B_{opt} = \mathcal{B}$.*

This work was done in collaboration with Jurandir Ceccon.

Referências

[1] W. Beckner - *Estimates on Moser Embedding*, Potential Analysis 20 (2004) 345-359.

[2] J. Ceccon, M. Montenegro - *Optimal L^p-Riemannian Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Math. Z. 258 (2008) 851-873.

[3] W. Chen, X. Sun - *Optimal improved L_p-Riemannian Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Nonlinear Analysis 72 (2010) 3159-3172.

[4] E. Hebey - *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, Courant Institute of Mathematical Sciences, Lecture Notes in Mathematics, 5 (1999).

[5] N. Kishimoto, M. Maeda - *Construction of blow-up solutions for Zakharov system on* $\mathbb{T}^2$, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 30 (2013), no. 5, 791-824.

[6] J. Moser - *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. 14 (1961) 577-591.

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

AUTONOMOUS OVSYANNIKOV THEOREM AND APPLICATION TO A NONLOCAL EVOLUTION EQUATION

RAFAEL FERNANDO BAROSTICHI
barostichi@dm.ufscar.br
Universidade Federal de São Carlos

Resumo

In this talk we want to present several versions of the abstract Cauchy-Kowalevski theorem in decreasing scales of Banach spaces, well known as the Ovsyannikov theorem, giving special attention to the version that uses the power series method to solve the Cauchy problem associated to abstract evolution equations. We then shall use this result to study the Cauchy problem associated to the generalized Camassa-Holm equation

$$(1-\partial_x^2)u_t = u^k u_{xxx} + bu^{k-1}u_x u_{xx} - (b+1)u^k u_x, \qquad u(0) = u_0, \tag{1}$$

where k is any positive integer and b is any real number. We shall prove that if the initial datum u_0 is analytic on the line or the torus, then the solution is analytic in both variables, globally in x and locally in t.

Joint work with Alex A. Himonas and Gerson Petronilho.

Referências

[1] M. S. Baouendi e C. Goulaouic, *Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy-Kovalevsky theorems*, Comm. in Partial Differential Equations, 2(11), 1151–1162 (1977).

[2] R. Camassa e D. Holm, *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, Phys. Rev. Lett., 71, (1977).

[3] A. Himonas e C. Holliman, *The Cauchy problem for a generalized Camassa-Holm equation*, Adv. Differential Equations, 19, 161–200 (2014).

[4] A. Himonas e G. Misiołek, *Analyticity of the Cauchy problem for an integrable evolution equation*, Math. Ann., 327, 575–584 (2003).

[5] L. Nirenberg, *An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalevski theorem*, J. Differential Geom., 6, (1972).

[6] L.V. Ovsyannikov, *Singular operators in Banach spaces scales*, Doklady Acad. Nauk., 163, (1965). Actes Congress Int. Math. Nice, 3, (1970).

[7] F. Treves, *An abstract nonlinear Cauchy-Kovalevska theorem*, Trans. A. M. S, 150, (1970).

ILL-POSED COUPLED DELAY SYSTEMS

Reinhard Racke

reinhard.racke@uni-konstanz.de

Department of Mathematics and Statistics, University of Konstanz

Resumo

We consider linear initial-boundary value problems that are a coupling like second-order thermoelasticity, or the thermoelastic plate equation or its generalization, the α-β-system. Now, there is a delay term given in part of the coupled system, and we demonstrate that the expected inherent damping will not prevent the system from not being stable; indeed, the systems will shown to be ill-posed: a sequence of bounded initial data may lead to exploding solutions (at any fixed time).

Referências

[1] R. Racke, *Instability in coupled systems with delay.* Comm. Pure Appl. Anal., 11, 1753–1773 (2012).

VIII Simpósio de Equações Diferenciais - 2015
UFPR - Universidade Federal do Paraná
PPGMA - Programa de Pós-Graduação em Matemática

Resolubilidade perto do conjunto característico para uma classe de operadores diferenciais parciais de primeira ordem

Wanderley Aparecido Cerniauskas
wanderley@uepg.br
Universidade Estadual de Ponta Grossa

Resumo

Seja

$$L = \partial/\partial t + (a(x) + ib(x))\partial/\partial x, b \not\equiv 0,$$

um campo vetorial complexo definido em $A_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$, sendo $a, b \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon); \mathbb{R})$ e $(x, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$.

Assumiremos que $b^{-1}(0) = \{0\}$ e abordaremos resultados sobre a resolubilidade perto do conjunto característico $\Sigma = \{0\} \times S^1$ da equação

$$Lu = pu + f, \quad p, f \in C^\infty(A_\epsilon).$$

Veremos que a relação entre as ordens de anulamento das funções a e b em $x = 0$ e certas médias da função p tem influência na resolubilidade.

Em particular, apresentaremos condições sobre p, sob as quais é possível determinar condições necessárias e suficientes sobre f para que a equação $Lu = pu + f$ tenha solução de classe C^∞ em uma vizinhança de Σ.

Este trabalho foi realizado em colaboração com Adalberto Panobianco Bergamasco e Paulo Leandro Dattori da Silva.

Referências

[1] A.P. Bergamasco and P.L. Dattori da Silva, *Global solvability for a special class of vector fields on the torus*, Contemp. Math. 400 (2006) 11-20.

[2] A.P. Bergamasco and A. Meziani, *Solvability Near the Characteristic Set for a Class of Planar Vector Fields of Infinite Type*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005) 77-112.

[3] P.L. Dattori da Silva, *Nonexistence of Global Solutions for a Class of Complex Vector Fields on Two-Torus*, J. Math. Anal. Appl. 351 (2009), pp. 543-555.

[4] P. L. Dattori da Silva, *C^k-Solvability Near the Characteristic Set for a Class of Planar Complex Vector Fields of Infinite Type*, Ann. di Mat. Pura Appl. (4) 189, 3 (2010), 403-413.