

Minicurso no Programa de Verão 2018 em Homenagem a Georg Cantor (1845-1918) no Centenário de sua morte

Histórico

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor foi um matemático alemão que nasceu em São Petersburgo (Rússia) em 1845 doutorando-se na Universidade de Berlin em 1867 sob a orientação de Ernst Kummer e Karl Weierstrass, e faleceu em Halle (Alemanha) em 1918. Cantor desencadeou uma “revolução” no pensamento matemático do século XIX criando novas formas do pensar matemático cuja principal característica é a “liberdade” dando asas à imaginação matemática. Em palavras do próprio Cantor: “a essência da matemática reside na sua liberdade”.

A contribuição pela que ele é mais conhecido é o desenvolvimento da teoria moderna dos conjuntos, especialmente a teoria dos conjuntos infinitos e dos conjuntos de pontos, assim como da aritmética transfinita dos números cardinais e dos números ordinais. O reconhecimento dos conjuntos infinitos como entidades matemáticas e sua quantificação e instrumentalização requereu a aceitação do “infinito em ato” no pensamento matemático, e a introdução dos conjuntos de pontos inaugurou a moderna topologia conjuntista um de cujos primeiros conceitos é o de “ponto limite” ou “ponto de acumulação”.

Sob a influência de Weierstrass, a discussão feita por Cantor sobre os números reais na construção da análise matemática, foi o primeiro passo no esclarecimento do “infinito” e a diferenciação entre o discreto e o contínuo e entre o enumerável e o não-enumerável.

De fato, Cantor introduziu a operação de “passagem ao limite” definindo os números reais como limites de sequências de racionais e, nesse processo, introduziu também a noção de “sequência fundamental”, hoje chamada de “sequência de Cauchy”, consolidando o processo histórico chamado de “aritmética da análise”, processo que fundamenta a análise matemática na teoria dos números reais.

Nesse contexto, o principal problema de Cantor foi caracterizar matematicamente “o contínuo”, conceito que até esse então tinha uma relação metafísica com o tempo e o espaço. Para tanto, ele procura uma definição puramente aritmética baseada na teoria dos números reais, estabelecendo como um “axioma” a bijeção entre a reta de pontos e esses números, e com o auxílio das novas noções topológicas de “derivado de um conjunto” e “conjunto perfeito” que ele introduziu. Por sinal, quando Cantor provou que a cardinalidade dos números reais era distinta da cardinalidade dos racionais, mostrou, dentre outras coisas, que a densidade não é suficiente para caracterizar o contínuo.

Com a teoria de conjuntos de pontos, Cantor começa o desenvolvimento da topologia conjuntista, como já mencionado, e dá os primeiros passos em um de seus ramos mais importante: a teoria descritiva de conjuntos, de relevância para a moderna teoria da medida.

Dentre os problemas topológicos que Cantor ajudou a elucidar, estão as noções de “dimensão” e de “continuidade” e sua relação, dada sua prova de que $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^m$ tem mesma cardinalidade para todo n e m , isto é, existe uma função bijetiva entre ambos.

Voltando ao problema do contínuo, Cantor o formulou inicialmente nos seguintes termos: em que posição colocar a cardinalidade do contínuo na sequência dos números transfinitos?, e sua principal conjectura sobre esse problema foi a chamada de “hipótese do contínuo”: o cardinal do contínuo (isto é, o dos números reais) é o imediatamente seguinte do cardinal do enumerável (isto é, o dos números naturais). Tal conjectura foi motivada pela sua prova topológica de que todo subconjunto fechado e não-enumerável da reta tem a mesma cardinalidade da própria reta.

A teoria dos conjuntos infinitos de Cantor é considerada por Hilbert “o paraíso que Cantor criou para nós”.

O papel de Cantor no desenvolvimento da matemática não se limita ao teórico. De fato, por gestão internacional de Cantor, realizou-se o Primeiro Congresso Internacional de Matemáticos em Zurich em 1897, evento que realiza-se a cada quatro anos em diversos países e neste ano de 2018 realizar-se-á no Rio de Janeiro promovido pelo IMPA, no contexto do denominado Biênio da Matemática no Brasil.